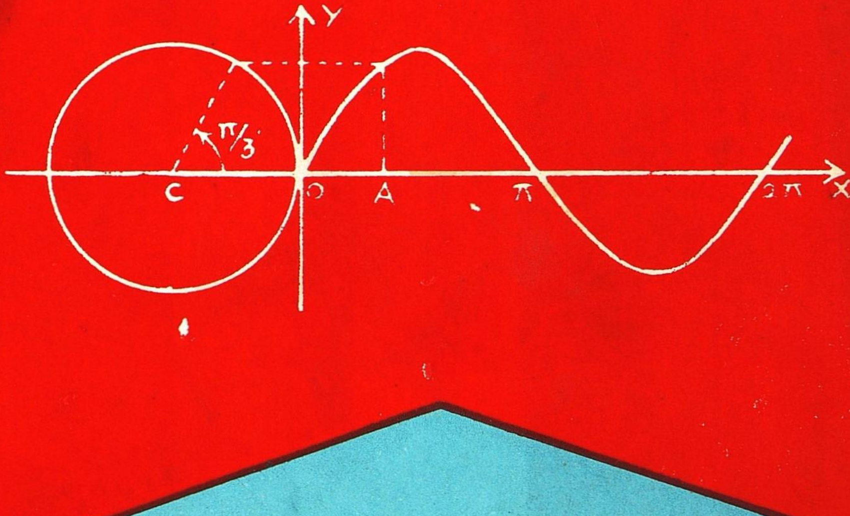
கணிதம்

மேல்நிலை—முதலாம் ஆண்டு

தொகுதி 1



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கணிதம்

தொகுதி

மேல்நிலை - முதலாம் ஆண்டு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்
சென்னை

© தமிழ்நாட்டு அரசு

முதல் பதிப்பு—1978

(தமிழ்நாட்டு அரசு ஆணைக்கிணங்க அமைக்கப்பட்ட குழுவினால் தயாரிக்கப்பட்டது.)

விலை : ரூ. 3-60

இந்நூல் 60 ஜி. எஸ். எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

அச்சிட்டோர் :

தி ஸ்ரீநிவாஸம் பிரஸ் ஆப் ஜுபிடர் எண்டர்பிரைசஸ்,
சென்னை—600 002

பொருளடக்கம்

பகுதி A - இயற்கணிதம்

		பக்கம்
1.	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	... 1
2.	மடக்கைகள்	... 28
3.	வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும்	... 45
4.	கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை	... 73
5.	தொடர் முறைகளும் தொடர்களும்	... 80
6.	ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்	... 117
7.	கணிச வித்தியாசங்கள்	... 136
	விடைகள்	... 149

பகுதி B - திரிகோணமிதி

1.	சில அடிப்படை உண்மைகள்	... 157
2.	திரிகோணமிதி சார்புகள்	... 165
3.	திரிகோணமிதி சார்புகளின் வரைபடங்கள்	... 183
4.	திரிகோணமிதி சார்புகளின் இயற்கணிதம்	... 191
5.	திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள்	... 222
6.	செங்கோண முக்கோணங்கள்	... 233
7.	முக்கோணங்களின் பண்புகளும், அவற்றின் தீர்வுகளும்	... 240
	விடைகள்	... 275

(C, D, E, F, G பகுதிகளின் அத்தியாயங்கள் தொகுதி II-இல் தொடரும்.)

பகுதி A

1. இருபடிச் சமன்பாடுகள்

1-1. இருபடிச் சமன்பாடுகள்

ஒரு சமன்பாட்டில் எடுத்துக்கொண்ட மாறியின் மிக உயர்ந்தபடி இரண்டானால், அச் சமன்பாடு அம் மாறியில் இருபடிச் சமன்பாடு எனப்படும். சான்றாக $4-3x^2=2x$ என்பது x மாறியில் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு ஆகும். இதனையே $3x^2+2x-4=0$ என ஒழுங்குபடுத்தியும் எழுதலாம். பொதுவாக, $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ என்றும் x மாறி என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், $ax^2+bx+c=0$ என்பது இருபடிச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொது வடிவம் ஆகும்.

ஒரு கணத்தின் உறுப்புகள் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாக அமையுமாயின், அக் கணத்தினை அவ்விருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் எனலாம். இக் கணத்தின் உறுப்புகள் இச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் எனப்படும்.

சான்றாக, 1, 3 இரண்டும் $x^2-4x+3=0$-ன் மூலங்கள். எனவே, $\{1, 3\}$ ஆனது $x^2-4x+3=0$-ன் தீர்வுக் கணம் ஆகும். மேலும், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை விடுவித்தல் என்பது, அச் சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம் காண்பதேயாகும்.

தீர்வுகள் காணல்

(அ) காரணிப்படுத்தும் முறை

இருபடிச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளைக் காணும் முறைகளில் காரணிப்படுத்தல் முறை ஒன்றாகும்.

$x^2-4x+3=0$ என்ற சமன்பாட்டினை எடுத்துக் கொள்வோம். காரணிப்படுத்தி எழுத $(x-1)(x-3)=0$, $a, b \in R$ எனில், $ab=0$ என்றால், $a=0$ அல்லது $b=0$ அல்லது $a=b=0$ என்றறிவோம். எனவே, $x-1=0$, $x-3=0$. இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்கள் $\{1\}, \{3\}$ ஆகும். இவற்றின் சேர்ப்புக்கணம் $\{1, 3\}$, $x^2-4x+3=0$-ன் தீர்வுக்கணம் ஆகும்.

(ஆ) *வர்க்க நிரப்பி முறை*

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \dots (1)$$

என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(அ-து) $ax^2 + bx = -c \quad (a \neq 0)$

a ஆல் வகுக்க, $x^2+\frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \dots (2)$

இடப்புறம் முழுவர்க்கமாக, $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ஐச் சேர்க்க வேண்டும்.

எனவே $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$

(அ-து.) $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \dots (3)$

$$\therefore \quad x+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

அல்லது, $x+\frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \dots (4)$

இதனின்று, $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

அல்லது $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ என்ற தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன.

$\{x \mid ax^2+bx+c=0\}$ என்பது $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம்

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

என்பதைக் குறிப்பிடும்.

மூலங்களிடை சம்பந்தம்

α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்களானால்,

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; \quad \beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

இதனின்று,

(i) மூலங்களின் கூடுதல் பலன் $= \alpha + \beta$

$$= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$= -\left(\frac{x\text{-ன் குணகம்}}{x^2\text{-ன் குணகம்}}\right)$$ என்றும்,

(ii) மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \alpha\beta$

$$= \left[\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] \times \left[\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$= \frac{\text{நிலையெண் உறுப்பு}}{x^2\text{-ன் குணகம்}}$$

என்றும் காணலாம்.

குறிப்பு: $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ இவற்றின் உதவி கொண்டு $\alpha^2 + \beta^2$, $\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha}$ போன்ற சமச்சீருள்ள (Symmetric) மூலங்களின் சார்புகளின் மதிப்புகளைக் கணக்கிடலாம்.

1-2. சமன்பாடு அமைத்தல்

m, n என்ற கொடுக்கப்பட்ட எண்களை மூலங்களாகக் கொண்ட சமன்பாடு

$(x-m)\ (x-n) = 0$ ஆகும்,

(அ-து.) $x^2-(m+n)\,x+mn = 0$.

(அ-து.) x^2-(மூலங்களின் கூடுதல் பலன்) $x+$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $= 0$.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\frac{1}{3+\sqrt{2}}, \frac{1}{3-\sqrt{2}}$ -களை மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

மூலங்களின் கூடுதல் $= \frac{1}{3+\sqrt{2}} + \frac{1}{3-\sqrt{2}}$

$$= \frac{3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2}}{9-2}$$

$$= \frac{6}{7}.$$

மூலங்களின் பெருக்கல் $= \left(\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{9-2}$$

$$= \frac{1}{7}.$$

எனவே, தேவையான சமன்பாடு,

$$x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{1}{7} = 0$$

(அல்லது) $7x^2 - 6x + 1 = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

α, β இரண்டும் $x^2+px+q=0$-ன் மூலங்கள் எனில் $\alpha^2+\alpha\beta$; $\beta^2+\alpha\beta$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

α, β இரண்டும் $x^2+px+q=0$-ன் மூலங்கள்.

எனவே,

$$\alpha+\beta = -p \quad \dots \quad (1)$$

$$\alpha\beta = q \quad \dots \quad (2)$$

$\alpha^2 + \alpha\beta$, $\beta^2 + \alpha\beta$ இரண்டையும், மூலங்களாக உடைய இருபடிச் சமன்பாடு காண,

மூலங்களின் கூடுதல் பலன் $= (\alpha^2 + \alpha\beta) + (\beta^2 + \alpha\beta)$
$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$= (\alpha + \beta)^2$
$= (-p)^2$ [(1)-ன் படி]
$= p^2$ ... (3)

மூலங்களின் பெருக்கற்பலன் $= (\alpha^2 + \alpha\beta)(\beta^2 + \alpha\beta)$
$= \alpha(\alpha + \beta)\,\beta(\alpha + \beta)$
$= \alpha\beta\,(\alpha + \beta)^2$
$= q\,(-p)^2$ [(1), (2)-ன் படி]
$= p^2 q$ ... (4)

∴ தேவையான சமன்பாடு

$x^2 -$ (மூலங்களின் கூடுதல் பலன்) $x +$ (மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்) $= 0$.

(அ-து.) $x^2 - x\,(p^2) + p^2 q = 0$ [(3), (4)-ன் படி]

(அ-து.) $x^2 - p^2 x + p^2 q = 0$

பயிற்சி 1-1.

(1) தீர்க்க :

(a) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6}$

(b) $\dfrac{1}{2x-3} + \dfrac{1}{3x-5} = 1$

(2) α, β இரண்டும் $x^2 - 4x + 1 = 0$-ன் மூலங்கள் எனில், $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^3 + \beta^3$, $\alpha^4 + \beta^4$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(3) $2x^2 - 6x + 3 = 0$-ன் மூலங்கள் p q எனில், $p^3 + q^3 - 3pq(p^2 + q^2) + 3pq(p + q)$ என்பதன் மதிப்பைக் காண்க.

(4) α, β ஆகியவை $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க :

(i) $\alpha-\beta$ (ii) $\alpha^2-\beta^2$ (iii) $\alpha^4+\beta^4$

(iv) $\alpha^3+\beta^3$ (v) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (vi) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

(vii) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{b}{\sqrt{ac}}$

(5) $2px^2+2x\sqrt{pq}+q=0$-ன் மூலங்கள் α, β எனில், $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$-ன் மதிப்பென்ன ?

(6) α, β ஆகியவை $x^2-p(x+1)-c=0$-ன் மூலங்கள் எனில் $(\alpha+1)(\beta+1)=1-c$ என நிரூபிக்க.

(7) α, β என்பன $x^2+px+q=0$-ன் மூலங்கள் ; மேலும் α^2, β^2 என்பன $x^2+ax+b=0$-ன் மூலங்கள் எனில் a, b என்பனவற்றை, p, q ஆகியவற்றின் மூலங்களாகக் காண்க.

(8) p, q என்பன $5x^2-x-2=0$-ன் மூலங்கள் எனின் $\frac{3}{p}, \frac{3}{q}$ என்பனவற்றை மூலங்களாகவுடைய சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(9) α, β என்பன $2x^2-3x+6=0$-ன் மூலங்கள் எனில் எச் சமன்பாடு α^2+2, β^2+2 ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்டிருக்கும் ?

(10) $2x^2+3x+4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தலைகீழிகளை மூலங்களாக உடைய சமன்பாட்டைக் காண்க.

(11) α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் எனில், கீழ்க்காணும் மூலங்களைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைக் காண்க:

(i) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha+\frac{1}{\beta}, \beta+\frac{1}{\alpha}$

(iii) $\frac{1}{\alpha+\beta}, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ (iv) $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$

(v) $\alpha(\alpha+\beta), \beta(\alpha+\beta)$

(vi) $(\alpha+\beta)^2, (\alpha-\beta)^2$

(12) $x^2+px+q=0$ என்ற சமன்பாட்டினை இருவர் விடுவிக்க முயன்றனர். முதலாமவர் p-ன் மதிப்பைத் தவறாகக் கொண்டு, தீர்வைக் கண்டதில் மூலங்கள் 2, b என்றும், இரண்டாமவர் q-ன் மதிப்பைத் தவறாகக் கொண்டு, மூலங்கள் 2, -9 என்றும் கண்டனர். சமன்பாட்டின் மெய்யான மூலங்களைக் காண்க.

1-3. ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புள்ள மூலங்களையுடைய சமன்பாடுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

α, β என்பன $ax^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் என்க. இங்கு ஒரு மூலம் மற்றதன் தலைகீழி என்ற தொடர்பு இருப்பின் $\alpha=\dfrac{1}{\beta}$ ஆகும்.

எனவே, $\alpha\beta=1$

(அ-து.) $\dfrac{c}{a}=1$

(அ-து.) $c=a$

(அ-து.) x^2-ன் குணகம் = நிலையெண் உறுப்பு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

இரு மூலங்களும், எண்ணளவில் சமமாகவும், குறியளவில் எதிராகவும் இருப்பின் $\alpha=-\beta$

(அ-து.) $\alpha+\beta=0$

எனவே, $\dfrac{-b}{a}=0$

(அ-து.) $b=0$

(அ-து.) x-ன் குணகம் $=0$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^2+bx+c=0$-ன் ஒரு மூலம் மற்றதின் வர்க்கம் எனில், $b^3+c^2-3\ bc+c=0$ எனக் காட்டலாம்.

α, α^2 என்பன $x^2+bx+c=0$-ன் மூலங்கள் என்க.

$$\therefore \quad \alpha+\alpha^2=-b \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\alpha \cdot \alpha^2 = c$$

$$(\text{அ-து.}) \quad \alpha^3 = c \qquad \ldots \quad (2)$$

(1)-ன் இரு பக்கமும் படி 3-க்கு உயர்த்த,

$$(\alpha+\alpha^2)^3=-b^3$$

$$\alpha^3+3\alpha^2 \cdot \alpha^2+3\alpha \cdot (\alpha^2)^2+(\alpha^2)^3=-b^3$$

$$\alpha^3+3\alpha^3 \cdot \alpha+3\ \alpha^3 \cdot \alpha^2+\alpha^6=-b^3$$

$$c+3c\alpha+3c \cdot \alpha^2+c^2=-b^3$$

$$c+3c\ (\alpha+\alpha^2)+c^2=-b^3$$

$$c+3c\ (-b)+c^2+b^3=0$$

$$b^3+c^2-3\ bc+c=0.$$

1·4. *மூலங்களின் தன்மை காணல்* (Nature of Roots)

$ax^2+bx+c=0$-ன் தீர்வுக் கணம்

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$ எனக் கண்டோம்.

$a, b, c \in R$. எனவே, $b^2-4ac \in R$

(i) $b^2-4ac>0$

(ii) $b^2-4ac=0$

(iii) $b^2-4ac<0$

என்ற மூன்று வகைத் தொடர்புகள் இருக்க இயலும்.

(i) $b^2-4ac>0$ எனில், b^2-4ac-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காணமுடியும். இங்கு b^2-4ac ஒரு வர்க்கம் எனில் b^2-4ac-ன் வர்க்கமூலம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகவும், b^2-4ac வர்க்கமின்றி யிருப்பின், b^2-4ac-ன் வர்க்கமூலம் ஒரு விகிதமுரு (Irrational) எண்ணாகவும் இருக்கும். இரு சமயங்களிலும் b^2-4ac-ன் வர்க்க மூலங்கள் இரண்டும் வெவ்வேருனவைகளாகவே இருக்கும். [இங்கு $y=ax^2+bx+c$ என்பதன் வரைபடம் x அச்சினை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.]

எனவே, $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்களாகவும் விகிதமுரு எண்களாகவும், வெவ்வேருகவும் அமையும்.

(ii) $b^2-4ac=0$ எனில், அதன் வர்க்கமூலமும் 0 ஆகும் எனவே $\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$. மூலங்கள் இரண்டும் சமமாக இருக்கும் [இங்கு $y=ax^2+bx+c$ என்பதன் வரைபடம் x அச்சினை ஒரு புள்ளியில் தொடும்.]

(iii) $b^2-4ac<0$ எனில் b^2-4ac-ன் வர்க்கமூலங்கள் மெய்யெண் கணத்தில் இரா. எனவே, $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்களும், மெய்மூலங்களாக இரா. அவை கற்பனை (imaginary) மூலங்களாகவே இருக்கும். [இங்கு $y=ax^2+bx+c$ என்ற வரைபடம் x அச்சினை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது.] எனவே, $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்களின் தன்மை b^2-4ac என்பதன் மதிப்புகளைப் பொறுத்துள்ளது எனக் காணலாம். இதன் காரணமாக,

b^2-4ac என்ற கோவை $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டின் *தன்மை காட்டி* எனப்படும்.

$\Delta=b^2-4ac$-ன் மதிப்பு	மூலங்களின் தன்மை	மூலங்கள்	சான்று
$\Delta>0$ மேலும் Δ ஒரு வர்க்கம்.	விகிதமுறு மெய்யெண்கள்; மேலும் வெவ்வேருனவை.	$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x^2-5x-14=0$
$\Delta>0$ மேலும் Δ ஒரு வர்க்கமின்றி இருத்தல்.	விகிதமுரு மெய்யெண்கள்; மேலும் வெவ்வேருனவை.		$4x^2-12x+7=0$
$\Delta=0$	விகிதமுறு மெய்யெண்கள்; சமமானவை.	$-\frac{b}{2a}$	$x^2-4x+4=0$
$\Delta<0$	கற்பனை.		$x^2+x+1=0$

மாணவர்கள் பயிற்சியாக மேலும் சில சமன்பாடுகளை விடுவித்து இதுபோன்ற அட்டவணையைத் தயார் செய்து சரி பார்க்கலாம். மேலும், அச் சமன்பாடுகளுக்கான வரைபடங்களையும் வரைதல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$b = k + \frac{a}{k}$ எனில், $x^2 + bx + a = 0$-ன் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் என நிரூபி.

தீர்வு :

$$x^2 + bx + a = 0$$

தன்மைகாட்டி, $\Delta = b^2 - 4a$

மேலும், $b = k + \dfrac{a}{k}$

$$\therefore \quad \Delta = \left(k + \frac{a}{k}\right)^2 - 4a$$

$$= k^2 + 2a + \frac{a^2}{k^2} - 4a$$

$$= k^2 - 2a + \frac{a^2}{k^2}$$

$$= \left(k - \frac{a^2}{k}\right)$$

Δ ஒரு வர்க்கம்.

எனவே, மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(4 - k)x^2 + (2k + 4)x + (8k + 1)$ கோவை ஒரு முழு வர்க்கமானால், k-ன் மதிப்பு என்ன ?

தீர்வு :

ஓர் இருபடிக் கோவை $Q\ (x)$ வர்க்கமாக இருக்குமாயின், இருபடிச் சமன்பாடு $Q\ (x) = 0$-ன் மூலங்கள் சமமாக இருக்கும். இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

$\therefore \quad (4-k)x^2+(2k+4)x+(8k+1)$ ஒரு வர்க்கமானல்,

$(4-k)x^2+(2k+4)x+(8k+1)=0$ என்பதன் மூலங்கள் சமம்.

எனவே, தன்மைகாட்டி $\triangle = 0$.

(அ-து·) $(2k+4)^2-4.(4-k)\ (8k+1)=0$

சுருக்க, $9k^2-27k=0$

(அ-து.) $9k(k-3)=0$

$k=0$ அல்லது $k=3$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(m^2+n^2)x^2+4mnx+m^2+n^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை மெய்ப்பிக்கும் மெய்யெண்களே இல்லை என நிரூபி.

தீர்வு :

$$\text{தன்மைகாட்டி } \triangle = (4mn)^2-4(m^2+n^2)\,(m^2+n^2)$$
$$= -4[(m^2+n^2)^2-4(m^2n^2)]$$
$$= -4(m^2-n^2)^2$$

எனவே, $\triangle$-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண்ணாகும். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மெய்ப்பிக்கும் மெய்யெண்களே கிடையாது.

1-5. பொது மூலங்கள் (Common roots)

$x^2-5x+6=0, \quad x^2-6x+8=0$ என்ற சமன்பாடுகளை எடுத்துக் கொண்டால் 2 என்பது இரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்களிலும் உள்ள ஓர் உறுப்பு. அதாவது 2 என்பது இரு சமன்பாடுகளுக்கும் பொதுவான மூலம் ஆகும்.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \dots \quad (1)$$
$$px^2+qx+r=0 \qquad \dots \quad (2)$$

என்ற சமன்பாடுகளுக்கும், பொதுமூலம் இருக்குமாயின் அதனைக் காணும் முறையைக் காண்போம்.

α என்பது (1), (2) ஆகியவற்றிற்குப் பொதுமூலம் எனில்

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0$$
$$p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி,

$$\frac{\alpha^2}{br-qc}=\frac{\alpha}{cp-ar}=\frac{1}{aq-bp} \qquad \ldots \quad (3)$$

எனவே,

$$\left(\frac{\alpha^2}{br-qc}\right)\left(\frac{1}{aq-bp}\right)=\left(\frac{\alpha}{cp-ar}\right)^2$$

$(br-qc)(aq-bp)=(cp-ar)^2$ என்பது தேவையான நிபந்தனை ஆகும்.

மேலும், (3)-ன் கடைசி இரண்டு விகிதங்களிலிருந்து, பொது மூலம் $\alpha=\dfrac{cp-ar}{aq-bp}$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x^2+ax+bc=0$, $x^2+bx+ca=0$ இரண்டிற்கும், ஒரு பொது மூலம் உண்டு எனில், அவற்றின் மற்ற மூலங்கள் $x^2+cx+ab=0$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்வு செய்யும் எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

α, β என்பன $x^2+ax+bc=0$-ன் மூலங்கள் என்க.

$$\therefore \alpha\beta=bc \qquad \ldots \quad (1)$$

α, γ என்பன $x^2+bx+ca=0$-ன் மூலங்கள் என்க.

$$\therefore \alpha\gamma=ca \qquad \ldots \quad (2)$$

α ஆனது $x^3+ax+bc=0$, $x^2+bx+ca=0$-களின் பொது மூலம் என்றால்,

$$\alpha^2+a\alpha+bc=0$$

$$\alpha^2+b\alpha+ca=0$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2c-b^2c}=\frac{\alpha}{bc-ca}=\frac{1}{b-a}$$

[I] [II] [III]

$$[I]=[II] \implies \alpha=\frac{c(a^2-b^2)}{c(b-a)}=-(a+b) \qquad \ldots (5)$$

$$[II]=[III] \implies \alpha=\frac{c(b-a)}{b-a}=c \qquad \ldots (6)$$

$\therefore \quad \alpha=-(a+b)=c \qquad \ldots (7)$

$\therefore \quad \alpha=c$ எனில் $\beta=b$ [(1)-லிருந்து]

$\alpha=c$ எனில் $\gamma=a$ [(2)-லிருந்து]

$\beta=b,\ \gamma=a$ இவற்றை மூலமாக உடைய சமன்பாடு

$$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$$

(அ-து.) $x^2-(a+b)x+ab=0$

(அ-து.) $x^2+cx+ab=0$ [(7)-ன்படி]

பயிற்சி 1-2.

(1) $ax^2+bx+c=0$ சமன்பாட்டின் மூலங்களிடையே கீழ்க் கண்ட தொடர்புகள் இருக்கத் தேவையான நிபந்தனைகள் யாவை?

(i) ஒரு மூலம் மற்றதைப் போல் இரு மடங்கு.

(ii) ஒரு மூலம் மற்றதைப் போல் 3 மடங்கு.

(iii) ஒன்று மற்றதைப் போல் 2 மடங்கு.

(iv) இரண்டும் சமம்.

(v) ஒன்று மற்றதன் வர்க்கமூலம்.

(vi) ஒன்று மற்றதன் தலைகீழி.

(vii) இரண்டும் மிகையாக இருக்க.

(viii) ஒன்று பூச்சியமாக இருக்க.

(2) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு மூலத்திற்கும், மற்றதற்கும் உள்ள வித்தியாசம் p எனில், $a\,(ap^2+4c)=b^2$ என நிரூபி. மேலும், இரு மூலங்களும் சமமாக இருக்கத் தேவையான நிபந்தனையினை இதனின்று பெறவும்.

(3) $x^2-px+q=0$ என்பதன் மூலங்கள் அடுத்தடுத்த முழுக்களானால், $p^2=4q+1$ என நிரூபிக்க.

(4) $\frac{1}{x+p}+\frac{1}{x+q}=\frac{1}{r}$ என்பதன் மூலங்கள் எண்ணளவில் சமமாகவும், குறியில் எதிராகவும் இருப்பின் அவற்றின் பெருக்கல் $-\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)$ எனக் காட்டுக.

(5) $p : q$ என்ற விகிதத்தில் $ax^2+bx+b=0$ என்பதன் மூலங்கள் இருப்பின்,

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=0$$ எனக் காட்டுக.

(6) $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்கள் $m : n$ என இருப்பின், $m\,n\,b^2=(m+n)^2ac$ என நிரூபிக்க.

(7) $x^2+3x-6=k$ என்பதன் மூலங்கள் $2 : 1$ என்ற விகிதத்தில் இருப்பின், k-ன் மதிப்பென்ன ?

(8) $3x^2+7x+8=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, x-ன் மெய் மதிப்புகள் பொருந்தா எனவும், 'a'-க்கு என்ன மதிப்பு அளிக்க. $3x^2+(7+a)x-a=0$ என்ற சமன்பாட்டில், x-ன் மதிப்புகள் மெய்யாக இருக்கும் எனவும் ஆராய்க.

(9) (a) $(p^2+q^2)x^2+2(p+q)\ x+2=0$

(b) $x^2-2px+p^2+q^2+r^2=0$

இவற்றின் மூலங்கள் மெய்யெண்கள் அல்ல என நிரூபிக்க.

(10) மூலங்களின் தன்மையைச் சோதிக்க.

(a) $4x^2-3x+2=0$

(b) $ax^2-bx-a=0$

(c) $9x^2-6x+1=0$

(d) $x+\frac{1}{x}=3$

(e) $(b^2-4ac)x^2+4(a+c)x-4=0.$

(11) $(x-a)(x-b)=h^2$-ன் மூலங்கள் எப்பொழுதும் மெய் என்பதை நிரூபிக்க.

(12) $x^2-2x\left(m+\frac{1}{m}\right)+4=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மையைச் சோதிக்க.

(13) a, c ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று எதிர்க்குறிகள் பெற்றிருப்பின் $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்கள் மெய் எனக் காட்டுக.

(14) $x^2-2(1+3k)x+7(3+2k)=0$-ன் மூலங்கள் சமம் எனில் k-ன் மதிப்பு என்ன ?

(15) $(m+1)x^2+2(m+3)x+(m+8)$ என்ற கோவை, ஒரு முழுவர்க்கமாக, m என்ன மதிப்பைப் பெற வேண்டும் ?

(16) $2b=c+a$ எனில், $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ என்பதன் மூலங்கள் சமம் என நிரூபிக்க.

(17) $U\equiv 16x^2+12x+39$, $V\equiv 9x^2-2x+11$.
$U+kV=0$-ன் மூலங்கள் சமம் எனில், k-ன் மதிப்பு என்ன ?

(18) $a+b+c=0$ எனில், $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் என நிரூபிக்க.

(19) $ax^2+bx+c=0$ என்ற சமன்பாட்டில், $2b=a+c$ எனில் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் என்றும், $b=\sqrt{ac}$ எனில் மூலங்கள் சமம் என்றும் நிரூபிக்க.

(20) கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகளில் மூலங்கள் விகிதமுறு எண்கள் எனக் காட்டுக:

(a) $2ax^2+(2a+b)x+b=0$

(b) $lx^2-(l-m)x-m=0$

(c) $(c+a-2b)x^2+(a+b-2c)x+(b+c-2a)=0$.

(21) $a(x^2+1)+2bx=0$ என்பதன் மூலங்கள் மெய் இல்லையெனில், $b(1+x^2)+2ax=0$-ன் மூலங்கள் மெய்யாகவும் சமமின்றியும் இருக்கும் என நிரூபிக்க.

(22) $x^2+px+q=0$; $x^2+p'x+q'=0$ ஆகியவற்றிற்கும் பொது மூலம் உண்டு எனில் அது $\frac{pq'-qp'}{q-q'}$ அல்லது $\frac{q-q'}{p'-p}$ என நிரூபிக்க.

(23) $2x^2-3x+c=0$; $x^2-9x+2c=0$ ஆகியவற்றிற்குப் பொதுமூலம் உண்டு எனில் c-ன் மதிப்பென்ன ?

(24) $ax^2+bx+c=0$; $bx^2+cx+a=0$ ஆகியவற்றிற்குப் பொதுமூலம் உண்டு எனில் $a=0$ அல்லது $a^3+b^3+c^3=3abc$ என இருத்தல்வேண்டும் என நிரூபிக்க.

(25) $a=0$ அல்லது $a+b+1=0$ எனில், $x^2+ax+b=0$; $x^2+bx+a=0$ ஆகியவற்றிற்குப் பொதுமூலம் உண்டு என நிரூபிக்க. மேலும், அவற்றின் மற்ற இரு மூலங்களும், $x^2+x+ab=0$ என்பதன் மூலங்கள் எனவும் நிரூபிக்க.

1-6. *இருபடிச் சமனிலிகள்* (Quadratic Inequalities)

$ax^2+bx+c \geq 0$; $ax^2+bx+c<0$ போன்றன ($a \neq 0$, a, b, $c \in R$) இருபடிச் சமனிலிகளின் உதாரணங்கள்.

$$6-x-2x^2<0 \qquad \ldots (1)$$

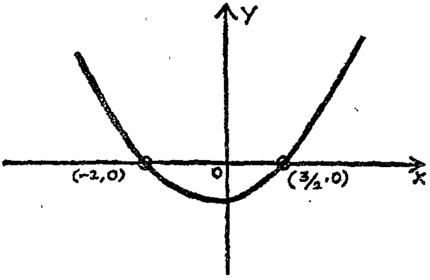
என்ற சமனிலியை விடுவிக்கும் முறையை ஆராய்வோம்.

முறை 1 (வரைபட முறை)

உறுப்புகளை மாற்றி x^2-ன் குணகம் மிகையாகச் செய்.

$$6-x-2x^2<0$$

$$2x^2+x-6>0 \qquad \ldots (2)$$



படம் 1-1.

$y=2x^2+x-6$ என்பதன் வரைபடத்தை வரைக.

இவ் வரைபடம் x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் $(-2,\ 0)$, $(\frac{3}{2},\ 0)$ எனக் காண்கிறோம்.

இங்கு $y>0$ எனில் வரைபடம் x அச்சுக்கு மேற்பகுதியில் இருக்கும்.

அப்பொழுது, $x > \frac{3}{2}$ ... (3)

மேலும் $x < -2$ ... (4)

என்றும் இருக்கும்.

$x = \frac{3}{2}$ க்கு வலப்புறம் உள்ள எல்லா x மதிப்புகளும் சேர்ந்த கணம் A என்றும், $x = -2$-க்கு இடப்புறம் உள்ள எல்லா x மதிப்புகளும் சேர்ந்த கணம் B என்றும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$y > 0$-ன் தீர்வுக்கணம்

$$S = A \cup B$$

$$S = \left\{ x \mid x < -2 \text{ அல்லது } x > \frac{3}{2} \right\}$$

முறை 2 : (எண் கணித முறை)

$$6 - x - 2x^2 < 0$$
$$\Longrightarrow 2x^2 + x - 6 > 0$$
$$\Longrightarrow (2x - 3)(x + 2) > 0$$

அதாவது, (i) $x + 2$, $2x - 3$ இரண்டும் மிகையாகவும், அல்லது (ii) இரண்டும் குறையாகவும் இருக்கலாம்.

(i) $x + 2 > 0$, $2x - 3 > 0$ எனில்,

$$x + 2 > 0 \Longrightarrow x > -2$$

$$2x - 3 > 0 \Longrightarrow x > \frac{3}{2}$$

இவை இரண்டும் மெய்யாக, $x > \frac{3}{2}$ ஆகும்.

$2x^2 + x - 6 > 0$ என்பதன் தீர்வுக் கணம்

$$A = \{x \mid x > -2\} \cap \left\{ x \mid x > \frac{3}{2} \right\}$$

$$= \left\{ x \mid x > \frac{3}{2} \right\}$$

(ii) $x+2<0$; $2x-3<0$ எனில்,

$$x+2<0 \implies x<-2$$

$$2x-3<0 \implies x<\frac{3}{2}$$

எனவே, $x+2<0$, $2x-3<0$-களின் தீர்வுக் கணம் :

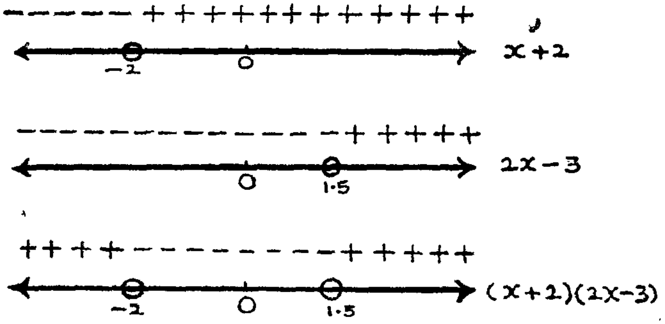
$$B=\{x \mid x<-2\} \cap \left\{x \mid x<\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\{x \mid x<-2\}$$

எனவே, (i), (ii)-களைச் சேர்க்கக் கிடைக்கும் S என்ற கணம் $(x+2)(2x-3)>0$ என்பதன் தீர்வுக் கணமாகும்.

$$S=A\cup B=\left\{x \mid -2>x>\frac{3}{2}\right\}$$

[குறிப்பு : இம் முறையின் தீர்வுகளை எண் கோட்டினைப் பயன்படுத்திச் சரி பார்க்கலாம்.]



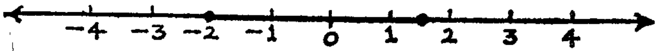
படம் 1-2

[குறிப்பு :

(1) $2x^2+x-6<0$-ன் தீர்வுக் கணம் $\left\{x \mid -2<x<\frac{3}{2}\right\}$

(2) $2x^2+x-6\leq 0$-ன் தீர்வுக் கணம் $\left\{x \mid -2\leq x\leq\frac{3}{2}\right\}$

இதனை, எண் கோட்டில் பிரதியிட



படம் 1-8

எடுத்துக்காட்டு 1 :

x மெய்யெண் எனில் $\dfrac{x^2+2x-11}{x-3}$ என்ற கோவை a, b-களுக்கு இடையே எல்லா மதிப்புகளையும் பெறாது எனில், a, b-களின் மதிப்பென்ன ?

தீர்வு :

$$y=\frac{x^2+2x-11}{x-3} \text{ என்க.}$$

(அ-து.) $y(x-3)=x^2+2x-11$

(அ-து.) $x^2+(2-y)\,x+(3y-11)=0 \qquad \ldots \quad (1)$

x மெய்யெண்.

$\Longrightarrow (2-y)^2-4\,(1)\,(3y-11) \geq 0$

$\Longrightarrow y^2-4y+4-12\,y+44 \geq 0$

$\Longrightarrow y^2-16y+48 \geq 0$

$\Longrightarrow (y-4)\,(y-12) \geq 0$

$\Longrightarrow$ 4, 12 இவற்றிற்கிடையே y அமைதல் கூடாது.

$\Longrightarrow a=4, \quad b=12.$

பயிற்சி 1-3.

வரைபடம் மூலம் தீர்வுக் கணம் கண்டுபிடித்து எண் கணித முறையில் சரிபார்.

(1) $x^2+3x-18\geq 0$ (2) $15x^2+4x-4\leq 0$

(3) $9-x^2>0$ (4) $x^2-2x+1\leq 0$

(5) $x^2-2x+1<0$ (6) $x^2-2x+1\geq 0$

(7) $-x^2+7x-6<0$ (8) $7x+4-2x^2<0$

(9) $ax^2+bx+c=0$ என்பதற்கு மெய் மூலங்களே இல்லை எனில், ax^2+bx+c என்ற கோவையில் x-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளும் ஒரே குறியுடனே இருக்கும் என நிரூபிக்க.

(10) $ax^2+bx+c=0$-விற்குச் சம மூலங்கள் உண்டு எனில், ax^2+bx+c என்பதன் எல்லா x-ன் மெய் மதிப்புகளும் ஒரே குறியுடனே இருக்கும் என நிரூபிக்க.

(11) $\alpha <$; α, β இரண்டும் $ax^2+bx+c=0$ என்பதன் மெய் மூலங்கள் எனில், $\alpha < x < \beta$ என இருக்கும்போது, ax^2+bx+c என்ற கோவை 'a'-ன் குறிக்கு மாருக இருக்கும் என நிரூபிக்க.

(12) x-ன் எல்லைகள் காண்க :

(a) $(x-1)(x-4)<0$

(b) $(x-1)(x-4)\geq 0$

(13) x ஒரு மெய்யெண் எனில் $\dfrac{x}{x^2-3x+4}$ ஆனது 1-க்கும் $-\dfrac{1}{7}$-க்கும் இடையே அமையும் என நிரூபிக்க.

(14) x ஒரு மெய்யெண் எனில்

$\dfrac{1}{3} < \dfrac{x+1}{x^2+x+1} < 1$ என நிரூபிக்க.

(15) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+7}$-ன் மீச்சிறு, மீப்பெரு மதிப்புகளைக் காண்க.

1-7. *இருபடிச் சமன்பாடுகளாக மாற்றத் தகுந்த சமன்பாடுகள்* (Equations reducible to quadratic equations)

$$\sqrt{2x^2+4}=2x-2.$$

$$x^4-5x^2+6=0$$

ஆகிய சமன்பாடுகளை, இருபடிச் சமன்பாடாக உருமாற்றி விடுவிக்கலாம். அவ்வாறு உருமாற்றி விடுவிக்கும்போது, உரு

மாறிய சமன்பாட்டிற்குக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளை விட அதிகமான தீர்வுகள் இருக்கலாம். எனவே, உருமாறிய சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளைக் கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளுடன் ஒப்பிட்டுச் சரிபார்த்துக் கொள்ளல்வேண்டும்.

உதாரணமாக, $M = N$ ... (1)

ஒரு சமன்பாடு என்க. இப்பொழுது $M^2 = N^2$-ன் தீர்வுகள் $M = \pm N$ அதாவது $M = N$ என்பதன் தீர்வோடு $M = -N$ என்பதன் தீர்வும் கிடைத்துள்ளது. எனவே, $M^2 = N^2$-ன் தீர்வுகள் $M = N$-உடன் சரி பார்த்துக்கொள்ளல்வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்க்க :

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5(x-2)} = 3$$

தீர்வு :

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5(x-2)} = 3$$

$$(\text{அ-து.}) \quad \sqrt{5(x-2)} = 3 - \sqrt{2x+5}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$5(x-2) = (3 - \sqrt{2x+5})^2$$

$$= 9 - 6\sqrt{2x+5} + (2x+5)$$

$$(\text{அ-து.}) \quad 3x - 24 = -6\sqrt{2x+5}$$

$$8 - x = 2\sqrt{2x+5}$$

மீண்டும் வர்க்கம் எடுக்க

$$(8-x)^2 = 4(2x+5)$$

$$64 - 16x + x^2 = 8x + 20$$

$$x^2 - 24x + 44 = 0$$

$$(x-22)(x-2) = 0$$

$$(\text{அ-து.}) \quad x = 2, 22$$

சரிபார்க்க, $x = 2$ எனில்,

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5(x-2)} - 3 = \sqrt{9+0} - 3$$
$$= 3 - 3$$
$$= 0$$

இது மெய்க்கூற்று.

$x = 22$ எனில்,

$$\sqrt{2x+5} + \sqrt{5(x-2)} - 3 = \sqrt{49} + \sqrt{100} - 3$$
$$= 7 + 10 - 3$$
$$= 14$$

மெய்க்கூற்றல்ல.

எனவே, $x = 2$ என்பது, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் ஒரு மூலம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்க்க :

$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{5} \quad \text{இங்கு } x \in R;\ x \neq -7\ ;\ x \neq -3$$

தீர்வு :

$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{5} \qquad \dots (1)$$

$$\frac{x+3 + x+7}{(x+3)(x+7)} = \frac{6}{5}$$

$$5(2x+10) = 6(x+3)(x+7)$$

மாற்றி அமைக்க, $6x^2 + 50x + 76 = 0$

$$(3x+19)(x+2) = 0$$

தீர்வுகள் $x = -2,\ \frac{-19}{3}$

சரிபார்க்க, $x = -2$ எனில்,

$$\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+3} - \frac{6}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{1} - \frac{6}{5}$$

$$= 0. \text{ மெய்.}$$

$x = -\frac{-19}{3}$ எனில்,

$$\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x+3}-\frac{6}{5}=\frac{1}{\frac{-19}{3}+7}+\frac{1}{\frac{-19}{3}+3}-\frac{6}{5}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{10}-\frac{6}{5}$$

$$=\frac{15-3-12}{10}=0.$$ மெய்.

எனவே, தீர்வுகள் $x = -2, \frac{-19}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்க்க :

$$(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)=336$$

தீர்வு :

$$[(x+1)(x-3)][(x+2)(x-4)]=336$$

$$[x^2-2x-3][x^2-2x-8]=336$$

$x^2-2x=t$ என்க.

$$(t-3)(t-8) = 336$$

$$t^2-11t+24=336$$

$$t^2-11t-312=0$$

$$(t+13)(t-24)=0$$

$$t=-13, 24.$$

$t=-13$ எனில்,

$$x^2-2x=-13$$

(அ-து.) $x^2-2x+13=0$

(அ-து.) $x=\frac{2t\sqrt{4-4.1.13}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{1-13}}{2}$

$$=1\pm\sqrt{-12}$$

தீர்வு மெய்யெண் கணத்தில் இல்லை.

$t = 24$ எனில்,

$$x^2 - 2x = 24$$

(அ-து.) $x^2 - 2x - 24 = 0$

(அ-து.) $(x-6)(x+4) = 0$

(அ-து.) $x = -4, 6.$

$x = -4, \; 6,$ எல்லாவற்றையும் $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) = 336$-ல் சரிபார்க்க, எல்லாத் தீர்வுகளும் மெய்யெனக் காண்கிறோம். எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிற்கு மெய்யெண் கணத்திலுள்ள தீர்வுகள் $\{-4, 6\}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்க்க :

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} = 2\frac{1}{6}$$

தீர்வு :

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t \text{ என்க.}$$

$$t + \frac{1}{t} = 2\frac{1}{6}$$

$$\frac{t^2+1}{t} = \frac{13}{6}$$

$$6t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$(2t-3)(3t-2) = 0$$

$$t = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad t = \frac{3}{2} \text{ எனில், } \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{3}{2}$$

(அ-து.) $\frac{x}{1-x} = \frac{9}{4}$

$$4x = 9 - 9x$$

$$13x = 9$$

$$x = \frac{9}{13}$$

$t = \frac{2}{3}$ எனில், $\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{2}{3}$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{4}{9}$$

$$9x = 4 - 4x$$

$$13x = 4$$

$$x = \frac{4}{13}$$

மேலும், $\left\{\frac{4}{13}, \frac{9}{13}\right\}$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் என்பதைச் சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்க்க :

$$2x^{-4} - x^{-2} - 3 = 0$$

தீர்வு :

$t = x^{-2}$ என்க. $\therefore \; t^2 = x^{-4}$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$2t^2 - t - 3 = 0$$

(அ-து.) $(2t-3)(t+1) = 0$

$t = \frac{3}{2}$, மேலும் $t = -1$

$t = \frac{3}{2}$ எனில்,

$x^{-2} = \frac{3}{2}$ (அ-து.) $\frac{1}{x^2} = \frac{3}{2}$

(அ-து.) $x^2 = \frac{2}{3}$ (அ-து.) $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$

$t = -1$ எனில்,

$$x^{-2} = -1 \text{ (அ-து) } \frac{1}{x^2} = -1$$

(அ-து.) $x^2 = -1$

x-ன் தீர்வு மெய்யெண் கணத்திலில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

தீர்க்க :

$$x+y=5; \quad x^3+y^3=35$$

தீர்வு :

$$x+y=5 \quad \dots \quad (1)$$

$$x^3+y^3=35 \quad \dots \quad (2)$$

(2)ஐ $(x+y)(x^2-xy+y^2)=35$ என எழுத,

$$5(x^2-xy+y^2)=35$$

$$x^2-xy+y^2=7 \quad \dots \quad (3)$$

(1) ஐயும் (3) ஐயும் தீர்க்க, நேரியல் சமன்பாடு $x+y=5$-லிருந்து x ஐ அல்லது, y ஐக் கண்டுபிடித்து, இருபடிச் சமன்பாடு $x^2-xy+y^2=7$-ல் பிரதியிட வேண்டும்.

$\therefore \quad x=5-y$ (1)-ன்படி

(3)-ல் பிரதியிட, $(5-y)^2-(5-y)y+y^2=7$

(அ-து.) $25-10y+y^2-(5y-y^2)+y^2=7$

(அ-து.) $3y^2-15y+18=0$

(அ-து.) $y^2-5y+6=0$

(அ-து.) $y=2$ மேலும், $y=3$

$y=2$ எனில், $x=5-2=3$

$y=3$ எனில், $x=5-3=2$

$\therefore$ தீர்வுகள் $x=2, \quad y=3$

$x=3, \quad y=2$

பயிற்சி 1-4.

தீர்க்க :

(1) (a) $2\sqrt{x+4} - x = 1$

(b) $\sqrt{4-3x} + 1 = 2x$

(c) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$

(d) $\sqrt{x+13} - \sqrt{7-x} = 2$

(e) $\sqrt{y+1} + \sqrt{2y-5} = 3$

(2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+6} = 1$-க்குத் தீர்வுகளே இல்லை என நிரூபிக்க.

தீர்க்க :

(3) (a) $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{4}{x+1} = \dfrac{-2}{x+2}$

(b) $\dfrac{2x}{x+3} - \dfrac{4}{x-3} = \dfrac{-6}{x+3}$

(4) (a) $(x-2)(x+6)(x+1)(x+3) + 56 = 0$

(b) $(x+2)(x+3)(x-1)(x-2) = 60$

(5) (a) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

(b) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 6 - 5\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$

(c) $9z^4 + 25 = 30z^2$

(d) $(x^2+4x)^2 + (x^2+4x) - 2 = 0$

(6) (a) $x+y = 12$; $x^2+y^2 = 74$

(b) $3x+y = 1$; $2x^2 - 3xy - y^2 = 4$

(c) $x^3+y^3 = 91$; $x^2 - xy + y^2 = 13$

(d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5$; $6xy = 1$

2. மடக்கைகள்
(Logarithms)

2-1. முன்னுரை

எண்களிடை பெருக்கல், வகுத்தல் செயல்கட்கும், எண்களின் அடுக்குகள், மூலங்கள் காண்பதற்கும் மடக்கைகள் உதவுகின்றன.

2-2. மடக்கையின் வரையறை

மடக்கையினை, சுருக்கமாக 'log' (logarithm) என்றும் 'மகை' என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். $a^x = N$ எனில் 'a' என்ற அடிமானத்திற்கு, N-ன் மடகைை x ஆகும்.

இதனை $\log_a N = x$ என எழுதுகிறோம்.

எனவே, $a^x = N \Longleftrightarrow \log_a N = x$

இங்கு, $a, x, N \in R$; $a > 0$ மேலும் $a \neq 1$; மேலும் $N > 0$.

மடக்கைகள் அடுக்குகளோடு உள்ள நெருங்கிய தொடர்பைக் கவனிக்கவும்.

மடக்கை, அடுக்குகட்கு இடையிலுள்ள தொடர்பைக் கீழே கொடுக்கப்பட்டவற்றினின்று நன்கு அறியவும்.

மடகைை வழி.	அடுக்கு வழி.
$\log_{10} 100 = 2$	$10^2 = 100$
$\log_2 64 = 6$	$2^6 = 64$
$\log_4 64 = 3$	$4^3 = 64$
$\log_8 64 = 2$	$8^2 = 64$
$\log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	$64^{\frac{1}{2}} = 8$
$\log_8 \frac{1}{64} = -2$	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

[குறிப்பு : (1) $\log_a a = 1$ ஏனெனில் $a^1 = a$
(2) $\log_a 1 = 0$ ஏனெனில் $a^0 = 1$

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்க்க :

(1) $\log_5 625 = x$ (2) $\log_5 0.04 = x$

தீர்வு :

(1) $\log_5 625 = x \implies 5^x = 625$

ஆனால் $5^4 = 625$ $\therefore \quad x = 4$

$$(2) \quad 5^x = 0.04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$$

$$= 5^{-2}$$

$$x = -2$$

2-3. மடக்கையின் சில பண்புகள்

(a) பெருக்கல் விதி :

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

நிரூபணம் :

$\log_a x = m$ என்க. எனவே $a^m = x$

$\log_a y = n$ என்க. எனவே $a^n = y$

$x \times y = a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^{m+n} = xy \implies \log_a(xy) = m + n$

எனவே, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

[குறிப்பு : பெருக்கல் விதியை இரண்டுக்கு மேற்பட்ட எண்களின் பெருக்கல்களுக்கு விரிவுபடுத்தி எழுதலாம்.

அதாவது $xyz = (xy)z$

$\therefore \quad \log_a(xyz) = \log_a(xy) + \log_a z$

$= \log_a x + \log_a y + \log_a z$]

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\log_{10}2 = 0\cdot3010$, $\log_{10}3 = 0\cdot4771$ எனில், $\log_{10}6$ என்ன ?

தீர்வு :

$$\log_{10}6 = \log_{10}(3 \times 2) = \log_{10}3 + \log_{10}2$$
$$= 0\cdot4771 + 0\cdot3010$$
$$= 0\cdot7781$$

(b) வகுத்தல் விதி :

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

நிரூபணம் :

$$\log_a x = m \Longrightarrow a^m = x$$
$$\log_a y = n \Longrightarrow a^n = y$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

மடக்கையின் வரையறைப்படி

$$\log_a \frac{x}{y} = m - n$$
$$= \log_a x - \log_a y$$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\log_{10}1.5$-ன் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$$\log_{10}1.5 = \log_{10}\frac{3}{2} = \log_{10}3 - \log_{10}2$$
$$= 0\cdot4771 - 0\cdot3010$$
$$= 0\cdot1761$$

(c) அடுக்கு விதி :

$$\log_a(x^p) = p\log_a x$$

நிரூபணம் :

$$\log_a x = m \Longrightarrow x = a^m$$

எனவே $x^p = (a^m)^p = a^{mp}$

$$a^{mp} = x^p \Longrightarrow \log_a(x^p) = mp = pm$$

$$= p.\log_a x$$

எடுத்துக்காட்டு 1:

$\log_{10}8$, $\log_{10}\cdot 008$ -களின் மதிப்புக் காண்க.

தீர்வு :

$$\log_{10}8 = \log_{10}2^3$$

$$= 3\log_{10}2$$

$$= 3 \times (0\cdot3010) = \mathbf{0\cdot9030}$$

$$\log_{10}\cdot 008 = \log_{10}\frac{8}{1000} = \log_{10}\left(\frac{2}{10}\right)^3$$

$$= 3\left[\log_{10}\frac{2}{10}\right] = 3\,[\log_{10}2 - \log_{10}10]$$

$$= 3\,[0\cdot3010 - 1] = 0\cdot9030 - 3$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$f(x) = \log_b \dfrac{1+x}{1+x}$ எனில் $2f(x) = f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log_b \frac{\left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right)}{\left(1 - \frac{2x}{1+x^2}\right)}$$

$$= \log_b \frac{1 + x^2 + 2x}{1 + x^2 - 2x}$$

$$= \log_b \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$$

$$= 2\log_b \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= 2f(x)$$

(d) *அடி மாற்றும் விதி :*

$$\log_b x = \log_b a \,.\, \log_a x$$

நிரூபணம் :

$\log_a x = m$ எனில், $a^m = x$

$\log_b a = n$ எனில், $b^n = a$

எனவே, $x = a^m = (b^n)^m = b^{mn}$

$b^{mn} = x \Longrightarrow \log_b x = mn$

$\therefore \quad \log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$

[குறிப்பு : இதனின்று, கொடுக்கப்பட்ட மடக்கையின் அடியினை, தேவையான மடக்கையின் அடியாக மாற்றி எழுதும் முறையினை அறியலாம்.]

கிளைத் தேற்றம் :

$$\log_b x = \log_a x \,.\, \log_b a$$

இதில் $x = b$ எனில்,

$$\log_b b = \log_a b \,.\, \log_b a$$

(அ-து.) $1 = \log_a b \,.\, \log_b a$

(அ-து.) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$(\log_a b \times \log_b c) \times \log_c a = \log_a c \times \log_c a = \log_a a = 1$

எடுத்துக்காட்டு 2

$a^2 + b^2 = 11\,ab$ எனில்,

$2 \log (a - b) = 2 \log 3 + \log a + \log b$

என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

(இங்கு மடக்கையின் அடி கொடுக்கப்படாவிட்டாலும், எல்லா மடக்கைகளுக்குமே ஒரு பொதுவான அடி (t என்க) உண்டு என நாம் எடுத்துக் கொள்ளல் வேண்டும்.)

$$a^2 + b^2 = 11\,ab$$

(அ-து.) $a^2 + b^2 - 2\,ab = 9\,ab$

$$(a - b)^2 = 9\,ab = 3^2.a.b$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$\log (a - b)^2 = \log (3^2 . a . b)$$

(அ-து.) $2 \log (a - b) = 2 \log 3 + \log a + \log b$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$\log_{10} 300 = 2 + \log_{10} 3$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\log_{10} 300 = \log_{10} 100 \times 3$$
$$= \log_{10} 100 + \log_{10} 3$$
$$= 2 + \log_{10} 3$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$$\frac{\log_a x}{1 + \log_a b} = \log_{ab} x$$

தீர்வு :

$$\frac{\log_a x}{1+\log_a b} = \frac{\log_a x}{\log_a a+\log_a b} \qquad [\because \log_a a = 1]$$

$$= \frac{\log_a x}{\log_a ab}$$

$$= \log_a x \log_{ab} a \qquad \left[\because \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right]$$

$$= \log_{ab} x \qquad [\because \log_{ab} a \,.\, \log_a x = \log_{ab} x]$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்க்க :

$$\log_3 4 + \log_4(x+2) = \log_3 \frac{4}{9}$$

தீர்வு :

$$\log_4(x+2) = \log_3\frac{4}{9} - \log_3 4 = \log_3\left(\frac{4/9}{4}\right) = \log_3\frac{1}{9}$$

$$= \log_3 3^{-2}$$

$$= -2\log_3 3$$

$$= -2$$

$$\therefore x+2 = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore x = \frac{1}{16} - 2 = \frac{-31}{16}$$

பயிற்சி 2-1.

(1) கீழ்க்கண்டவற்றை மடக்கை வடிவில் எழுதுக :

(a) $3^2 = 9$ (b) $3^{-2} = \frac{1}{9}$ (c) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

(d) $5^0 = 1$ (e) $\frac{1}{216} = 6^{-3}$

(2) மடக்கை வடிவில் எழுதுக :

(a) $p^q = n$ (b) $3^4 = 9^2$ (3-ன் அடியாக)

(c) $3^4 = 9^2$ (9 அடியாக)

(3) தீர்க்க :

(a) $\log_3 x = 4$ (b) $\log_3 81 = x$

(c) $\log_x \frac{1}{16} = -4$ (d) $\log_8 x = \frac{-4}{3}$

(e) $\log_{15} 1 = x$ (f) $\log_x 213 = 1$

(4) மடக்கை காண்க :

(a) $\sqrt[3]{9}$ அடியாகவுள்ள 81-ன் மடக்கை.

(b) $\sqrt{N}$ அடியாகவுள்ள $N^{\frac{5}{2}}$-ன் மடக்கை.

(c) 4 அடியாகவுள்ள 0·0625-ன் மடக்கை.

(5) கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்புக் காண்க :

(a) $\log_7 1$ (b) $\log_{10} \cdot 01$ (c) $\log_a a$

(d) $\log_{25} 625$ (e) $\log_{125} 25$ (f) $\log_3 \sqrt[4]{3}$

(6) சுருக்குக :

(a) $\log_{60} 40 + \log_{60} 90$

(b) $\log_4 60 - \log_4 20$

(c) $\log_a M + \log_a N - 2 \log_a P$

(7) கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\log \frac{x}{y} + \log \frac{y}{z} + \log \frac{z}{x} = 0$

(ii) $\log x^2 + \log y^2 + \log z^2 = \log xy + \log zx + \log yz$

(iii) $\frac{\log (a^5) - \log(a^3)}{\log (a^9) - \log(a^7)} = 1$

(8) $f(x) = a^x$ எனில்,

$\log f(m \pm n) = \log f(m) \pm \log f(n)$

(9) $\log(m + n) = \log m + \log n$ எனில,

m - ஐ n மூலம் கூறுக.

(10) $\log_a y = 2 \log_a x + 1$ எனில், $y = ax^2$ என நிரூபிக்க.

(11) $A = \log_{10} 2$ எனில், $\log_{10} 125 = 3 - 3A$ எனக் காட்டுக.

(12) கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க :

(a) $\log_{10} 1600 = 2 + 4 \log_{10} 2$

(b) $\log_{10} 25 = 2 - 2 \log_{10} 2$

(c) $\log_{10} 11\frac{1}{9} = 2 - 2 \log_{10} 3$

(d) $\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2$

(13) $x = \log\frac{6}{5}$, $y = \log\frac{10}{9}$; $z = \log\frac{24}{25}$ எனில்,

$3x + y - z = \log 2$ எனக் காட்டுக.

(14) $x = \log\frac{2}{3}$, $y = \log\frac{3}{5}$, $z = \log\frac{5}{8}$ எனில்,

$x + y + z + \log 4 = 0$ எனக் காட்டுக.

(15) கீழ்க்கண்டவற்றின் அடி 10 எனக் கருத்தில் கொண்டு நிரூபிக்க :

(a) $\log\frac{15}{16} + \log\frac{64}{81} - \log\frac{4}{27} = \log 5$

(b) $\log\frac{351}{539} + 2\log\frac{91}{100} - 3\log\frac{39}{110} - 2\log\frac{11}{10} = 1$

(16) அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல்

$\frac{2}{3} < \log_{10} 5 < \frac{3}{4}$ என நிரூபிக்க.

(17) $\log 2 = 0{\cdot}3010$, $\log 3 = 0{\cdot}4771$ எனில்,

(i) $\log 432$ (ii) $\log \frac{384}{.75}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(18) $\log\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) - \log\left(1 - \frac{x}{x+1}\right) = \log x$ என நிரூபிக்க.

(19) $a^2 + b^2 = 6ab$ எனில்,

(i) $2 \log (a+b) = \log a + \log b + 3 \log 2$ என்றும்

(ii) $\log\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} (\log a + \log b)$ என்றும் நிரூபிக்க.

(20) $\log(x+y) = \log 3 + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y$ எனில்,
$x^2 + y^2 = 7xy$ எனக் காட்டுக.

(21) $\log\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ எனில், $a = b$ எனக் காட்டுக.

(22) $\log_a m = x$; $\log_b m = y$ எனில்,

$\log_{b/a} m = \frac{xy}{x-y}$ என நிரூபிக்க.

(23) $x = \log_a bc$; $y = \log_b ca$; $z = \log_c ab$ எனில்,

(a) $1 + x = \log_a abc$ என்றும், (b) $\Sigma \frac{1}{x+1} = 1$ என்றும் காட்டுக.

(24) $2 \log_8 N = p$, $\log_2 2N = q$; $q - p = 4$ எனில், $N = 512$ எனக் காட்டுக.

(25) $\log_{1/a} N = - \log_a N$ என நிரூபிக்க.

(26) $a^{2\frac{1}{2}} + c^2 = b^2$ எனில், $\frac{1}{\log_{b+c} a} + \frac{1}{\log_{b-c} a} = 2$ என நிரூபிக்க.

(27) x-ன் தீர்வுகளைக் காண்க.

(a) $\log_4 3 + \log_4 x+2 = 2$

(b) $\log_4 20 - \log_4 30 - \log_3 5 = x$

(c) $2^{2x-5} \times 3^{2-x} = 7^{2x}$

(28) அடிகோள்கள் மூலம் நிரூபிக்க.

(a) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$ (b) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(c) $\log_a A \cdot \log_b B = \log_b A - \log_a B$

2-4. *மடக்கையின் அட்டவணைகள்*

பொதுவாக மடக்கைகளின் அடி 10 அல்லது 2 ஆகவோ தான் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. e-யினை அடியாக உள்ள மடக்கைகளின் தொகுப்பு முறையினை இயல் மடக்கை எனகிறோம். அடியினை 10 ஆகக் கொண்டுள்ள மடக்கைத் தொகுப்பு முறை பொது மடக்கை அல்லது நேபியரின் மடக்கை என்று வழங்கப்படுகிறது. மதிப்பீடுகள் செய்யும் கணக்குகளில் பொது மடக்கைகளே கையாளப்படுகின்றன. பொது மடக்கைகளுக்காகத் தயாரிக்கப்பட்ட அட்டவணைகள் உண்டு. அவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறையினைக் காண்போம். இனிமேல் $\log_{10} x$ என்பது $\log x$ என்றே எழுதப்படும்.

(a) 227 ஐ எடுத்துக்கொள்க.

$$10^2 < 227 < 10^3$$

$$\therefore \quad \log_{10} 2 < \log 227 > \log_{10} 3$$

$$(\text{அ-து.})\ 2 < \log 227 < 3$$

எனவே, $\log 227 = 2 +$ (ஒரு மிகை பின்னம்)

இதே போன்று, $10^{-2} < \log \cdot 03 < 10^{-1}$ என்பதற்கு $\log \cdot 03 = -2 +$ (ஒரு மிகை பின்னம்) என்று கிடைக்கும்.

எனவே, ஓர் எண்ணின் மடக்கையானது, ஒரு முழு எண் பகுதியையும், ஒரு மிகை பின்னத்தின் பகுதியையும் கொண்டு அமைகிறது. இங்கு முழு எண் பகுதி, மிகை அல்லது குறை யாக இருக்கலாம். ஆனால், பின்னப்பகுதி எப்பொழுதுமே, மிகை யாகவே எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

இவ்வாறு கிடைக்கும் முழு எண் பகுதியை, *மடக்கை முழு எண்,* (characteristic) என்றும், பின்னப் பகுதியை '*மடக்கைப் பின்னம்*' (Mantissa) என்றும் குறிப்பிடுகின்றோம். மேற்கண்ட இரு உதாரணங்களிலும் log 227-ன் மடக்கை முழு எண் 2 ஆகும். மேலும், log 0·3-ன் மடக்கை முழுஎண் -2 ஆகும்.

கவனிக்க : $227 = 2{\cdot}27 \times 10^2$. மடக்கை முழு எண் -2 ஆகும்.

$\cdot 03 = 3 \times 10^{-2}$. மடக்கை முழு எண் -2 ஆகும்.

(a) ஒன்றைவிட அதிகமான மதிப்புடை எண்களின் மடக்கை முழு எண் மிகையாகவும், அவ்வெண்ணின் முழு எண் பகுதியில் உள்ள மொத்த இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையை விட ஒன்று குறைவாகவும் இருக்கும்.

(b) ஒன்றைவிடக் குறைவான மதிப்புடைய எண்களின் மடக்கை எண் குறையாகவும், பூச்சியமில்லாத முதலெண்ணிற்கு முன் உள்ள பூச்சியங்களின் எண்ணிக்கையைவிட ஒன்று அதிக மாகவும் இருக்கும்.

உதாரணமாக ,

மடக்கை	முழு எண் பகுதியின் இலக்கங்கள்	மடக்கை முழு எண்	விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் எண்
2478	4	3	$2{\cdot}478 \times 10^3$
247·8	3	2	$2{\cdot}478 \times 10^2$
24·78	2	1	$2{\cdot}478 \times 10$
2·478	1	0	2·478

மடக்கை	பின்னப்பகுதியில் முதலில் உள்ள பூச்சியங்கள்	மடக்கை முழு எண்	விஞ்ஞானக் குறியீட்டில் எண்
·2478	0	−1	$2·478 \times 10^{-1}$
·02478	1	−2	$2·478 \times 10^{-2}$
·002478	2	−3	$2·478 \times 10^{-3}$

குறை மடக்கை முழு எண்களை $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ ... என்று குறிப்பது மரபு.

(b) *மடக்கை பின்னம்* (Mantissa)

மடக்கை பின்னங்களை அட்டவணைகளிலிருந்து காணலாம்.

log 2478ஐ உதாரணமாக எடுத்துக்கொண்டால், மடக்கை எண் = 4 − 1 = 3.

இப்பொழுது மடக்கை அட்டவணையில் முதல் நிரலில் 24-க்கு நேராக உள்ள நிறையில் *7 என்ற* நிரலுக்குச் சொந்தமான நிரலில் உள்ள மதிப்பு 3927 உடன் அதே 24-க்கு ஆன நிறையின் இடை மிச்சங்கள் அல்லது சராசரி வித்தியாசம் (mean difference) 7-க்குச் சொந்தமான நிரலில் உள்ள 14ஐக் கூட்ட 3941 எனக் கிடைக்கிறது.

எனவே, log 2478 = 3·3941 ஆகும்.

[குறிப்பு :

log 24·78 = 1·3941

log ·002478 = $\bar{3}$·3941

இதனால் தசமப் புள்ளியைப் பொருட்படுத்தாது, ஒரே அணியாக வரும் எண்களை எடுத்துக்கொண்டால் மடக்கை பின்னம் ஒன்றே என்பது தெளிவாகிறது.]

2-5. எதிர்மடக்கைகள் (Anti-Logarithms)

கொடுக்கப்பட்ட மடக்கைக்கு உரித்தான ஓர் எண்ணினையே, எதிர் மடக்கை என்கிறோம்.

உதாரணமாக, $\log 2{\cdot}478 = 0{\cdot}3941$

$$\text{antilog } 0{\cdot}3941 = 2{\cdot}478$$

முன்பு கண்டபடியே, இங்கு எதிர்மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் கொடுக்கப்பட்ட மடக்கை பின்னத்திற்கும் உரிய எண்ணினை காணலாம்.

உதாரணமாக, antilog 1·3941-ன் மதிப்பைக் காண்போம். இங்கு 1 ஆனது, மடக்கை முழு எண் ஆகும். மேலும் ·3941 மடக்கை பின்னமாகும். எதிர்மடக்கை அட்டவணையிலிருந்து ·3941 என்ற மடக்கை பின்னத்தின் எண்ணுக 2478 கிடைக்கிறது. இப்பொழுது மடக்கை முழு எண் 1 என உள்ளதால், அவ்வெண்ணில் முழு எண் பகுதியில் 2 இலக்கங்கள் இருக்கும். அதாவது, 1·3941ஐ மடக்கையாகக் கொண்ட எண் 24·78 ஆகும்.

எனவே, $\text{antilog } 1{\cdot}3941 = 24{\cdot}78$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$2^{12} \times 3^{7}$-ல் உள்ள இலக்கங்களின் எண்ணிக்கை என்ன ?

தீர்வு :

$x = 2^{12} \times 3^{7}$ என்க.

$$\begin{aligned}\log x &= 12 \log 2 + 7 \log 3 \\ &= 12\,(0{\cdot}3010) + 7 \times (0{\cdot}4777) \\ &= 3{\cdot}6120 + 3{\cdot}3397 \\ &= 6{\cdot}9517\end{aligned}$$

மடக்கை முழு எண் 6.

எனவே, x-ல் உள்ள மொத்த இலக்கங்கள் 7.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மதிப்புக் காண்க : $\dfrac{\sqrt[3]{738.2}\,(38\cdot747)^2}{(0\cdot9576)^{\frac{1}{2}}\,(8743)}$

தீர்வு :

$$N = \frac{(738\cdot2)^{\frac{1}{3}}\quad(38\cdot74)^2}{(0\cdot9576)^{\frac{1}{2}}\,(8743)} \text{ என்க.}$$

$\therefore\ \log N$

$= \frac{1}{3}\log 738\cdot2 + 2\log 38\cdot74 - \frac{1}{2}\log \cdot9576 - \log 8743$

$= \frac{1}{3}(2\cdot8682) + 2(1\cdot5882) - \frac{1}{2}(\bar{1}\cdot9812) - (3\cdot9416)$

$= 0.9561 + 3.1764 - \bar{1}\cdot9906 - 3\cdot9416$

$[\frac{1}{2}(\bar{1}\cdot9812) = \frac{1}{2}(\bar{2} + 1\cdot9812) = \bar{1}\cdot9906]$

$= 4\cdot1325 - 3\cdot9322$

$= 0\cdot2003$

antilog $0\cdot2003 = 1\cdot586$

எனவே, $N = 1\cdot586$

கவனிக்க :

$2\cdot7300 + 3\cdot4529 = 6\cdot1829$

$2\cdot4819 + \bar{1}\cdot6438 = (2-1) + (\cdot4819 + \cdot6438)$

$= 1 + (1\cdot1257) = 2\cdot1257$

$1\cdot4819 + \bar{2}\cdot6438 = (1-2) + (1\cdot1257)$

$= 0\cdot1257$

$2\cdot4819 \times 3 = 7\cdot4457$

$2\cdot4819 \div 3 = 0\cdot8273$

$\bar{1}\cdot4819 \div 3 = [(-3 + 2\cdot4819) \div 3]$

$= [-1 + \cdot8273] = \bar{1}\cdot8273$

$\bar{6}\cdot2435 \div 5 = [(-10 + 4\cdot2435) \div 5]$

$= [-2 + \cdot8487]$

$= \bar{2}\cdot8487$

பயிற்சி 2·2.

(1) கீழ்க்காணும் எண்களுக்கு மடக்கை முழு எண்கள் கூறுக:

(a) 327 (e) 0·002

(b) 28·3 (f) 0·0008

(c) 1·0347 (g) 0·001307

(d) 0.517

(2) பின்வரும் எண்களுக்கு மடக்கைப் பின்னம் காண்க:

(a) 3·5214 (b) 1·318 (c) 0·3059

(3) பின்வரும் எண்களின் மடக்கை காண்க.

(a) ·124 (b) ·261 (c) ·0562 (d) 4·3201

(4) பின்வரும் மடக்கை எண்களுக்கு எதிர் மடக்கை காண்க.

(a) 2·1335 (b) $\bar{2}$·5752 (c) 0·5198

(5) 3^{76} என்பதிலுள்ள மொத்த இலக்கங்கள் எத்தனை?

(6) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மடக்கை எண்களைச் சுருக்குக.

(a) $\bar{2}\cdot 8+\bar{3}\cdot 7$ (e) $\bar{1}\cdot 7\times 5$

(b) $2\cdot 9-5\cdot 4$ (f) $\bar{6}\cdot 4\div 3$

(c) $3\cdot 4-3\cdot 8$ (g) $\bar{4}\cdot 5\div 3$

(d) $\bar{2}\cdot 3-\bar{4}\cdot 7$

(7) சரிபார்க்கவும்:

(a) $\sqrt{34.71\times(30\cdot 3)^3}=982\cdot 4$

(b) $\left(\dfrac{294\times 125}{42\times 32}\right)^{\frac{2}{3}}=9\cdot 076$

(c) $\frac{\sqrt[3]{9+625}}{\sqrt{2}} = 15 \cdot 84$

(d) $\sqrt[\frac{1}{3}]{(8 \cdot 675)^2} = 0 \cdot 2369$

(e) $(1 \cdot 85 \times 0 \cdot 027)^2 = \cdot 00249$

(f) $\sqrt[3]{38 \cdot 1 \times \cdot 0072} = \cdot 650$

(8) $v^2 = u^2 + 2fs$ என்பதைப் பயன்படுத்தி $u = 19 \cdot 7$, $f = 5 \cdot 5$, $s = 247$ எனில், v என்ன என்று கண்டுபிடிக்க.

3. வரிசை மாற்றங்களும் சேர்வுகளும்

(Permutations and Combinations)

3-1. எண்ணுதலின் அடிப்படை விதி

அன்றாடம் நமது பிரச்சினைகளைத் தீர்க்க முடிவெடுக்கும் பொழுது, பல்வேறு மாற்றுத் தீர்வைகளைப் பற்றி ஆய்ந்து, சூழ்நிலைக் கேற்ற மிகப் பொருத்தமான தீர்வைத் தேர்ந்தெடுக் கின்றோம். அது பொழுது, சில அடிப்படைக் கணித தத்துவங் களைப் பயன்படுத்த முற்படுகின்றோம்.

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டும்பொழுது தலையா, பூவா எனக் காண்பதிலுள்ள ஆர்வம் என்று குறையும்? இங்கு இரு தீர்வு கள் அல்லது விளைவுகள் உள்ளன. நீள் செவ்வக வடிவ தாயக் கட்டையை உருட்டும்பொழுது, நான்கு மாறுபட்ட விளைவுகள் ஏற்படும். 1 முதல் 6 என்ற எண்கள் குறித்த கன சதுரக் கட்டையை உருட்டினால், ஆறு வித விளைவுகளை எதிர்பார்க்கலாம் என்பது நேரிடை. ஓர் அலுவலகத்தில் காலியாக உள்ள இரு பணியிடங்கட்கு நால்வர் மனுச் செய்தால், எத்தனை விதங்களில் காலியிடங்களை நிரப்பலாம்? 9 பேர்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவி லிருந்து, 6 பேர் கொண்ட கைப்பந்துக் குழுவைத் தேர்ந்தெடுக்க, எத்தனை மாறுபட்ட வழிகள் உண்டு? இத்தகைய சுவைமிக்க கேள்விகட்கு விடை காணும் முறையினைக் காண்போம்.

ஒரு கல்லூரியில் 5 பேச்சாளர்கள் உள்ளனர்.

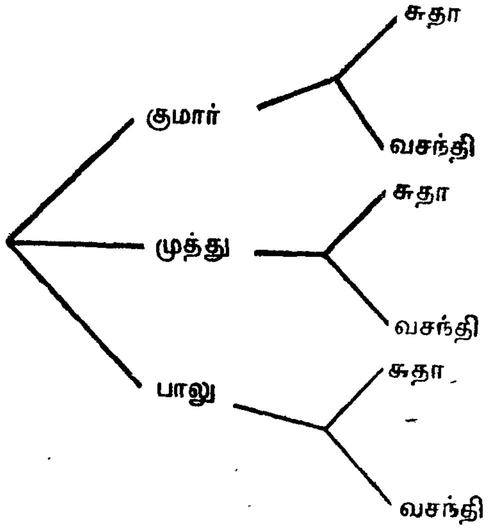
$D =$ {குமார், முத்து, பாலு, சுதா, வசந்தி}

ஒரு போட்டிக்கு மாணவரில் ஒருவரையும், மாணவியரில் ஒருவரையும் தெரிவு செய்யவேண்டும். எத்தனைவிதக் குழுக்கள் தெரிந்தெடுக்கலாம்? மாணவர் கணம் மூவரையும், மாணவியர் கணம் இருவரையும் கொண்டுள்ளதால், வேண்டிய தீர்வு அக்

கணங்களின் குறுக்குப் பெருக்கற் கணம் என முன்னர் கண்டுள்ளீர்கள்.

{(கு, சு), (கு, வ), (மு, சு), (மு, வ), (பா, சு), (பா, வ)}

இதனைச் செடிப்படம் மூலமும் குறிக்கலாம்.



படம் 3-1

எனவே, செடிப் படத்திலிருந்து ஒரு மாணவனும், ஒரு மாணவியும் உள்ளவாறு 6 குழுக்கள் அமைக்கலாம் என்பது புலப்படுகிறது. அக் குழுக்கள்:

குமார், சுதா
குமார், வசந்தி
முத்து, சுதா
முத்து, வசந்தி
பாலு, சுதா
பாலு, வசந்தி

என்று சோடிகள் கொண்டிருக்கும். முதலில் மாணவியரையும், பிறகு, மாணவரையும் தெரிந்தெடுப்பதாகக் கொண்டாலும், மேலே குறிப்பிட்ட நபர்களைக்கொண்ட ஆறு குழுக்களே கிடைக்கும் என்பது தெளிவு.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

மேற்கண்ட எடுத்துக்காட்டில் உள்ள கணம் Dஐக் கொண்டு ஒரு தலைவரும் ஒரு செயலரும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் எத்தனை வெவ்வேறான வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம் ?

தீர்வு : நிலை 1 :

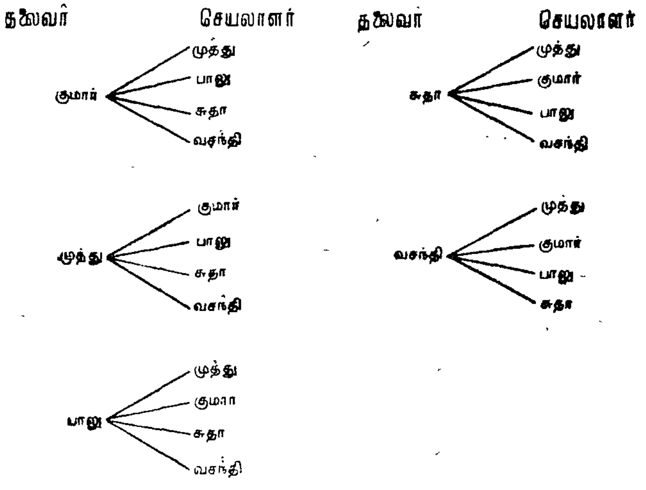
கணம் D-லிருந்து, ஒரு தலைவரை ஐந்து வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

நிலை 2

ஒரு செயலரை, கணம் D-லிருந்து தலைவராகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டவர் நீங்கலாக உள்ள மீதி நால்வரில் இருந்துதான் தேர்ந்தெடுக்க முடியும். எனவே, இதனை நான்கு வழிகளில் செய்யலாம்.

ஒரு தலைவரை 5 வழிகளில் தேர்ந்தெடுத்த பின்னர், மீதியுள்ள நால்வரில் ஒருவரைச் செயலராக 4 வழிகளில் தேர்ந்தெடுப்பதால், மொத்தம் $5 \times 4 = 20$ வழிகளில் ஒரு தலைவரையும், ஒரு செயலரையும் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

இதனைச் செடிப்படம்மூலம் சோதனை செய்யலாம்.



படம் 3-2

மேற்கண்டவற்றிலிருந்து பின்வரும் உண்மையினைப் பெற இயலுகின்றது.

ஒரு செயலைத் தனித்து m வழிகளிலும், இரண்டாவது செயலைத் தனித்து n வழிகளிலும் செய்ய முடியுமானால், இரு செயல்களையும் ஒருங்கே $m \times n$ வழிகளில் செய்யலாம்.

பல்வேறு செயல்கள் உள்ள பொழுது, இவ்வுண்மையின் மூலம் அச் செயல்களை ஒருங்கே $m \times n \times r \times \ldots\ldots \times t$ வழிகளில் செய்யலாம் எனப் பெறலாம். இது 'எண்ணுதலின் அடிப்படை விதி' எனக் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு சங்கத்தின செயற்குழுவில் 5 பேர் உள்ளனர். வாரந்தோறும் நடைபெறும் கூட்டமொன்றிற்கு அவர்களில் ஒருவர் அனுப்பப்படவேண்டும். இரண்டு வாரங்களில் பங்கு கொண்டோர் சோடி எத்தனை முறைகளில் அமையும்?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனையிலிருந்து ஓர் உறுப்பினரேகூட இரு கூட்டங்களுக்கும் செல்லலாம் எனக் கவனிக்கவும்.

செயல்கள்	தனித்த மொத்த வழிகள்
முதல் கூட்டத்திற்கு உறுப்பினரைத் தேர்ந்து எடுத்து அனுப்புதல்	5
இரண்டாவது கூட்டத்திற்கு உறுப்பினரைத் தேர்ந்தெடுத்து அனுப்புதல்	5
எனவே, எண்ணுதல் அடிப்படை விதிகளின்படி மொத்த வழிகள்	$5 \times 5 = 25$

எடுத்துக்காட்டு 1 :

1, 2, 3, 4, 5, 6, எண்களைப் பயன்படுத்தி, எத்தனை வெவ்வேறான 2 உறுப்புகள் உள்ள, மூன்றிலக்க எண்கள் பெற இயலும், எனக் காண்க.

செயல்கள்	தனித்த வழிகள்
முதல் இலக்கத்திற்கான எண்ணைப் பொறுக்கி எடுத்தல். (கொடுக்கப்பட்ட ஆறு எண்களில் எதையுமே தேர்ந்தெடுக்கலாம்.)	6
அடுத்த, இலக்கத்திற்கான எண்ணைப் பொறுக்குதல். (முதல் இலக்கத்திற்குத் தேர்ந்தெடுத்த எண்ணைத் தவிர மீதியுள்ள 5 எண்களில் எதையேனும் ஒன்றினைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.)	5
கடைசி இலக்கத்திற்கான எண்ணைப் பொறுக்கி எடுத்தல். (முதல் இரண்டு இலக்கங்கட்குத் தேர்ந்தெடுத்த இரண்டு எண்கள் போக, மீதியுள்ள 4 எண்களில் ஒன்றிலிருந்து தேர்வு செய்யலாம்.)	4

மூன்றிலக்க எண்கள் உருவாக்கும் முறைகள் $= 6 \times 5 \times 4$

$= 120$

அல்லது 6 எண்களிலிருந்து 120 மாறுபட்ட மூன்றிலக்க எண்களை உருவாக்கலாம்.

பயிற்சி 3-1.

(1) A, B, C என்ற உச்சிகளைக் கொண்டு, எத்தனை முக்கோணங்கள் அமைக்கலாம் ?

(2) கோவைக்கும் ஈரோட்டிற்கும் இடையே மூன்று தடங்களும், ஈரோட்டிற்கும் சேலத்திற்கும் இடையே இரு தடங்களும் இருப்பின் எத்தனை மாறுபட்ட வழிகளில் சேலத்திலிருந்து கோவையை அடையலாம் ?

(3) ஒரு குழுமத்தில் 12 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர். இவர்களிலிருந்து ஒரு தலைவர், ஒரு செயலர், ஒரு பொருளர் ஆகியவர்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் ?

(4) சிவப்பு, மஞ்சள், ஊதா, பச்சை நிறங்களையுடைய கொடிகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு சாரணன் இரு கைகளிலும் ஒவ்வொரு கொடியைப் பிடித்துக்கொண்டு சைகை காட்டினால், மொத்தம் எத்தனை விதமான சைகைக் குறிகளைச் செய்து காட்டலாம் எனக் காண்க.

(5) $\{a, b, c, d\}$ கணத்தின் உடகணமாக 3 உறுப்புகள் கொண்ட உட்கணங்கள் எத்தனை ?

(6) ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டிக் கிடைத்த விளைவுகள் குறித்துக் கொள்ளப்பட்டது எனில், எத்தனை விதமான விளைவுகள் கிடைத்திருக்கும் என்றும் n தடவைகள் சுண்டப்பட்டிருப்பின் கிடைக்கப் பெறும் விளைவுகள் எத்தனை என்றும், காண்க.

(7) $K=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ என்ற கணத்தைப் பயன்படுத்தி, ஓர் எண்ணை ஒரு தடவைக்குமேல் பயன்படுத்தினால், எத்தனை இரு இலக்க எண்கள் கிடைக்கும் என்று காண்க. ஓர் எண்ணை ஒரு முறையே பயன்படுத்தலாம் என்று நிபந்தனை விதித்தால எத்தனை இரு இலக்க எண்கள் கிடைக்கும் என்றும் காண்க.

(8) $V=\{a, e, i, o, u\}$ என்ற உயிர் எழுத்துகள் கணத்திலிருந்து, ஓர் எழுத்தை ஒரு தடவைக்கு மேல்

(i) பயன்படுத்தாமலும்,

(ii) பயன்ப்டுத்தியும் எத்தனை 5 எழுத்துகள் கொண்ட

சொற்கள் காணலாம்? (சொற்களுக்குப் பொருளிருக்கத் தேவையில்லை.)

(9) ஒரு வர்த்தக அனுமதிச் சீட்டின் அடையாளக் குறியில் முதல் பகுதி ஓர் ஆங்கில எழுத்தாகும். அடுத்த பகுதி மூன்றிலக்க எண்ணாகும். எண் பகுதி 0-ல் தொடங்கக்கூடாதென்றால், எத்தனை அனுமதிச் சீட்டுகள் பெற முடியும்?

3-2. *வரிசை மாற்றங்கள்*

$D = \{$முத்து, குமார், பாலு, சுதா, வசந்தி$\}$ என்ற சென்ற பகுதியில் எடுத்துக்கொண்ட கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இதிலிருந்து, முன்பு ஒரு தலைவரும், செயலரும் தேர்ந்தெடுக்கும் மொத்த முறை 20 எனக் கண்டோம். அப்பொழுது, தலைவராக வருவதற்கு 5 வாய்ப்புகள் என்றும், அவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற ஒவ்வொரு வாய்ப்பிற்கும் 4 விதங்களில் செயலர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம் என்றும் கண்டோம்.

இங்கு, இதனையே கணம் D-ன் உறுப்புகள் ஒரே சமயத்தில் இரண்டினைப் பயன்படுத்த $5 \times 4 = 20$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைத்தது என்கிறோம். இவ்வாறு கிடைக்கப்பெற்ற 20 வழிகளிலும், முதல் நபர் தலைவராகவும், இரண்டாமவர் செயலராகவும் இருந்தனர். எந்த வரிசையில் தேர்ந்தெடுத்தோம் என்பது முக்கியமாகிறது.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கணத்தின் உறுப்புகளைப் பயன்படுத்தித் தேவையான வரிசையில் உறுப்புகளை அமைத்தலை *வரிசை மாற்றம்* என்கிறோம். மேற்கண்ட உதாரணத்தில் வரிசை மாற்றமாக ஐந்து பொருள்களிலிருந்து இரண்டு பொருள்களை எடுத்தலைப்பற்றி ஆராய்ந்தோம். இதனை $_5P_2 = 20$ என்ற குறியீட்டால் குறிப்பிடுகிறோம். $_5P_2$ எனில், ஐந்து பொருள்களில் இருந்து இரண்டு பொருள்களை ஒரே சமயத்தில் எடுத்தல் என்பதாகும்.

பொதுவாக, $_nP_r$ என்பது n பொருள்களிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் r பொருள்களை எடுத்தல் என்பதாகும். இப்பொழுது $_nP_r$-க்கான வாய்பாட்டைக் காணும் முறையைக் காணலாம்.

$\overline{{}_nP_r}$ என்பது n பொருள்களிலிருந்து r காலியிடங்களை நிரப்புதலுக்குச் சமமாகும்.

செயல்கள்	தனித்த வழிகள்
முதல் இடத்தை n பொருள்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு பொருளை 'n' விதங்களில் எடுத்து நிரப்பலாம்.	n
இரண்டாவது இடத்தை மீதியுள்ள $(n-1)$ பொருள்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு பொருளை $(n-1)$ விகிதங்களில் எடுத்து நிரப்பலாம்.	$n-1$
மூன்றாவது இடத்தை மீதியுள்ள $(n-2)$ பொருள்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு பொருளை $(n-2)$ விகிதங்களில் எடுத்து நிரப்பலாம்.	$n-2$
$(r-1)$ இடங்கள் முன்பே நிரப்பப் பட்டு இருப்பின்} rஆவது இடத்தை $n-(r-1)$ பொருள்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு பொருளை $(\overline{n-r-1})$ விதங்களில் எடுத்து நிரப்பலாம்.	$n-(r-1)$ $=n-r+1$

எனவே, n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்கள் வரிசைப் படுத்தும் மாற்று முறைகள்

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(\overline{n-r-1}) \text{ ஆகும்}$$

ஆகவே, $\overline{{}_nP_r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(\overline{n-r-1})$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

இங்கு, n, r இரண்டும் முழு எண்கள், $n \geq r$ ஆகும்.

[குறிப்பு :

$_nP_r = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$-ல் இடது பக்கம் '$r$' உறுப்புகள் உள்ளன.]

எடுத்துக்காட்டு

1 முதல் 9 வரையிலுள்ள இயல் எண்களைப் பயன்படுத்தி, வெவ்வேறான எண்களைக் கொண்ட மூன்று இலக்கங்களாலான அனுமதி தகடுகள் எத்தனை ?

தீர்வு :

9 பொருள்களிலிருந்து 3 பொருள்களை, ஒரே சமயத்தில் எடுக்கவேண்டும்.

$$_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

$_nP_n$ அல்லது $n!$

$_nP_n$ என்பது, n பொருள்களிலிருந்து, ஒரே சமயத்தில் n பொருள்களை வரிசைப்படுத்தும் முறைகளைக் குறிக்கும். உதாரணமாக, ஐந்து பேர் ஒரு வரிசையில் எத்தனை விதமாக நிற்கலாம் என்பதும், 5 பொருள்களிலிருந்து ஒரே சமயத்தில் 5 பொருள்களை வரிசைப்படுத்துதல் என்பதும் ஒன்றே.

(அ-து.) $_5P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

எனவே, n பொருள்களிலிருந்து 'n' பொருள்களை ஒரே சமயத்தில வரிசைப்படுத்துவதாக வைத்துக் கொண்டால்,

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)......(n-\overline{n-1})$$
$$= n(n-1)(n-2)......(n-n+1)$$
$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

[இங்கு இடது பக்கத்தில n உறுப்புகள் உள்ளன.]

குறியீடு

1-லிருந்து n வரையுள்ள எல்லா எண்களையும் தொடர்ச்சியாகப பெருக்குதலை $\underline{|n}$ அல்லது $n!$ [n-ன் காரணியப் பெருக்

கல் அல்லது பேக்டோரியல் n என வாசிக்க வேண்டும்.] என்று குறியீட்டால் குறிப்பிடுகின்றோம்.

அதாவது $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$3! = 3 \times 2 \times 1$

$2! = 2 \times 1$

$1! = 1$

மேலும் $5! = 5 \times 4!$

$= 5 \times 4 \times 3!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2!$

$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1!$ என்பது வெளிப்படை.

எனவே, $n! = n\,(n-1)!$ என எழுதலாம்.

மேலும் $0! = 1$ என்று நாம் வரையறை செய்துகொண்டு $\lfloor 1 = 1.0!$ என்றவாறு எழுதலாம்.

பேக்டோரியல் குறியீட்டுப்படி, வரிசை மாற்றத்தின் வாய்பாடுகளை

(1) ${}_nP_n = n!$ என்றும்

(2) ${}_nP_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

$$= \frac{n\,(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)\,(n-r)\,(n-r-1)\ldots\ldots3.2.1}{(n-r)\,(n-r-1)\ldots\ldots3.2.1}$$

$\therefore\ {}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ என்றும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$_8P_3$-ன் மதிப்பை இரு வழிகளில் காண்க.

தீர்வு :

$$_8P_3 = 8 \times 7 \times 6$$

மேலும், $_8P_3 = \dfrac{8\,!}{(8-3)\,!} = \dfrac{8\,!}{5\,!}$

$$= \frac{8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{1 . 2 . 3 . 4\ 5}$$

$$= 8 \times 7 \times 6$$

எடுத்துக்காட்டு

0, 1, 2, 3, 4, 5 என்ற எண்களைப் பயன்படுத்தி (ஓர் எண்ணில் இவற்றை ஒரு முறைக்கு மேல் பயன்படுத்தாதவாறு) எத்தனை எண்களை உருவாக்கலாம் ? அவற்றில் எத்தனை எண்கள் 3000ஐ விட அதிகமானவை ?

(i) நாம் முதலில் எத்தனை 6 இலக்க எண்கள் கிடைக்கின்றன எனக் கண்டுபிடிப்போம்.

அவை $_6P_6 = 6\,!$ ஆகும்.

ஆனால் $_6P_6$ எண்களில் 0 முதல் இலக்கமாக வரும் எண்களை விலக்க வேண்டும். அதாவது 0 முதல் இலக்கம் எனில் மீதி 5 இலக்கங்களையும், மீதியுள்ள 1, 2, 3, 4, 5 எண்களைக் கொண்டு $_5P_5$ வழிகளில் நிரப்பலாம். எனவே, முதல் இலக்கமாக 0 இல்லாத ஆறு இலக்க எண்கள்

$$= {}_6P_6 - {}_5P_5$$

$$= 6\,! - 5\,!$$

$$= 6.5\,! - 5\,! = 5\,!\,(6-1) = 5.5\,! = 600$$

இது போன்று,

5 இலக்க எண்கள் $= {}_6P_5 - {}_5P_4 = 600$

4 இலக்க எண்கள் $= {}_6P_4 - {}_5P_3 = 300$

3 இலக்க எண்கள் $= {}_6P_3 - {}_5P_2 = 100$

2 இலக்க எண்கள் $= {}_6P_2 - {}_5P_1 = 25$

1 இலக்க எண்கள் $= {}_6P_1 - {}_5P_0 = 5$

எனக் காணலாம்.

எனவே, மொத்த எண்கள் = 1630.

(ii) 600, ஆறு இலக்க எண்களும், 600 ஐந்து இலக்க எண்களும், 10,000-க்கும் மேற்பட்டவையாதலால் 3000ஐ விட அதிகமான மதிப்புடையவையாகும்.

3000ஐ விட அதிக மதிப்புடைய 4 இலக்க எண்கள் எத்தனை எனக் காண்போம்.

இவ்வெண்கள் 3, 4, 5 ஆகிய மூன்று எண்களை மட்டும் முதலில் கொண்டதாக இருக்கவேண்டும். எனவே, இங்கு, முதல் இலக்கத்தினை 3 தனித்த வழிகளாலும், மீதியுள்ள 5 எண்களைக் கொண்டு, மீதியுள்ள மூன்று ஸ்தானங்களையும், ${}_5P_3$ தனித்த வழிகளிலும், அமைத்து 3000ஐ விட அதிகமான எண்களைக் கணக்கிடலாம். எனவே, மொத்த எண்களின் எண்ணிக்கை $= 3 \times {}_5P_3 = 180$.

∴ 3000ஐவிட அதிகமான மதிப்புடைய எண்களின்

எண்ணிக்கை $= 600 + 600 + 180$

$= 1380$

எடுத்துக்காட்டு

பொருளியல் நூல்கள் ஆறு, கணித நூல்கள் மூன்று, வரலாற்று நூல்கள் இரண்டு ஆகியவற்றைத் துறைப்படி பிரிந்து பின் எத்தனை விகிதங்களில் வரிசைப்படுத்தலாம் ?

தீர்வு :

ஒரே இயல் நூல்களை ஒரு தொகுதியாகச் செய்து கொள்க.

செயல்கள்	தனித்த வழிகள்
பொருளியல் நூல் ஆறை ஒரு தொகுதி (வரிசை) யாக்குதல்	${}_6P_6 = 720$
கணித நூல் 3ஐ ஒரு தொகுதி (வரிசை) யாக்குதல்	${}_3P_3 = 6$
சரித்திர நூல் 2ஐ ஒரு தொகுதி (வரிசை) யாக்குதல்	${}_2P_2 = 2$
மூன்று தொகுதிகளையும் ஒரு தொகுதி (வரிசை) யாக்குதல்	${}_3P_3 = 6$

வரிசையாக அடுக்க $720 \times 6 \times 2 \times 6 = 51840$ மொத்த வழிகள் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு வட்ட மேஜையைச் சுற்றி 8 மாணவர்கள் எத்தனை வித மான சார் வரிசைகளில் அமரலாம்?

தீர்வு :

இத்தகைய கணக்குகளில், முதலில் ஒரு மாணவனுக்கு ஓரிடத்தை ஒதுக்கி, அதை நிலையானதாக்கிக் கொள்ளவும். சார் வரிசையையே நாம் காணப்போவதால், முதலில் ஒதுக்கிய இடம் எவ்விடமானாலும், அதைப் பொருட்படுத்தத் தேவையில்லை.

மீதியுள்ள 7 மாணவர்களைக் கொண்டு, ${}_7P_7$ வழிகளில் பூர்த்தி செய்யலாம். எனவே, எட்டு இடங்களிலும் ${}_7P_7$, அதாவது $7! = 5740$ வழிகளில் மாணவர்களை அமர வைக்கலாம்.

[குறிப்பு :

வட்ட வரிசை மாற்றத்திற்கு மேற்கண்ட கணக்கு ஓர் உதாரணம் ஆகும். இதிலிருந்து n பொருள்களை நேர் வரிசை

மாற்றத்தில் அமைத்தால் கிடைக்கும் வழிகள் $n!$ ஆனால், வரிசை மாற்றத்தில் n பொருள்களை அமைத்தால் கிடைக்கும் வழிகள் $(n-1)!$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.]

எடுத்துக்காட்டு

bell என்ற வார்த்தையைப் பயன்படுத்தி எத்தனை வெவ்வேறான 4 எழுத்துகள் உள்ள வார்த்தைகள் காணலாம்?

தீர்வு :

(i) p என்பது தேவையான வரிசை மாற்றங்கள் என்க.

(ii) (b, e, l_1, l_2) என்பதை 4 வெவ்வேறான எழுத்துகள் என எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த 4 எழுத்துகளையும் பயன்படுத்தி 4 எழுத்து வார்த்தையை 4! வழிகளில் காணலாம்.

செயல்கள்	தனித்த வழிகள்
b, e, l, l எழுத்துகளைக் கொண்டு வரிசை மாற்றங்கள் செய்தல்	p
l-களை l_1, l_2 என்ற எழுத்துகளால் மாற்றி அமைத்தல்	2 !

$$\therefore \quad p \times 2! = 4!$$

$$p = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$$

பயிற்சி 3-2.

(1) n-ன் மதிப்புக் காண்க.

(a) ${}_nP_5 = 42 \times {}_nP_3$

(b) $\dfrac{{}_nP_4}{{}_{(n-1)}P_4} = \dfrac{5}{3} \quad (n>4)$

(c) ${}_nP_5 : {}_nP_3 = 2 : 1$

(2) ஒரு கடற்படைப் பிரிவினரிடம் 8 கொடிகள் வெவ்வேறு நிறத்தில் உண்டு. ஒரு சமயத்தில் 3 கொடிகளை ஒன்றன்கீழ்

ஒன்ருகக் கொடிக்கம்பத்தில் பறக்க விடுவதின்மூலம் எத்தனை வகைச் சமிக்ஞைகள் அனுப்பலாம் ?

(3) 9 நபர்கள் விளையாடும் மட்டைப் பந்து ஆட்டத்தில் பந்தை அடிக்கும் ஆட்டக்காரர்களின் வரிசைகள் எத்தனை ?

(4) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ஆகிய எண்களைக் கொண்டு உருவாக்கக் கூடிய மூன்று இலக்க இரட்டைப் படை எண்கள் எத்தனை ? எந்த எண்ணும் ஓர் எண்ணில் ஒரே தடவைதான் வர வேண்டும்.

(5) 0, 1, 2, 3, 4 எண்களைப் பயன்படுத்தி 1000-க்கும், 4000-க்கும் இடையில் அமையும் எண்கள் எத்தனை ? எந்த இலக்கமும் ஓர் எண்ணில் ஒரே தடவைதான் வரவேண்டும்.

(6) ஒரு தடவைக்குமேல் பயன்படுத்தாது, 1 2, 3, 4, 5, 6 இலக்கங்களைக் கொண்டு (i) 5ஆல் (ii) 25ஆல் வகுபடும் எண்களின் மொத்த எண்ணிக்கை என்ன ?

(7) எல்லா இலக்கங்களையும் பயன்படுத்தி 1, 3, 5, 7, 9 ஆகியவற்றிலிருந்து எத்தனை வேறுபட்ட எண்களை உண்டாக்க முடியும்? அவற்றின் கூட்டல் தொகை என்ன ?

(8) எந்த இரு சிறுமியர்களும் சேர்ந்து அமராதவாறு 6 சிறுவர்களையும், 4 சிறுமிகளையும் வரிசையாக அமரச் செய்யும் விதங்கள் எத்தனை ?

(9) ஒரு குடும்பத்திலுள்ள 4 சகோதரர்கள், 3 சகோதரிகள் யாவரும் ஒரே வரிசையில் (எப்பொழுதும் சகோதரிகள் ஒன்ருகவே உட்கார வேண்டும் என்ருல்) எத்தனை விதங்களில் உட்காரலாம் ?

(10) ஒரு தேர்விற்குள்ள 6 கேள்வித் தாள்களில் 2 கணித பாடததை யொட்டியவை. கணிதத் தாள்கள் அடுத்து, அடுத்து வராதபடி எத்தனை விதங்களில் தேர்வுக் கால அட்டவணை தயாரிக்கலாம் ?

(11) கணித நூல்கள் 7, பௌதிக நூல்கள் 4, வேதியியல் நூல்கள் 2 இவற்றை ஓர் அலமாரியில் அடுக்குகிருேம். ஒரே

பாடநூல்கள் அடுத்தடுத்து இருக்க வேண்டுமானால், எத்தனை விதங்களில் அடுக்கலாம் ?

(12) STRANGE என்ற வார்த்தையில் உள்ள எழுத்துகளை உயிர் எழுத்துகள், ஒற்றைப்படை இடங்களில் வருமாறு அமைத்து எத்தனை வார்த்தைகள் அமைக்கலாம் ?

(13) 1, 2, 3, 4 ஆகிய இலக்கங்களைப் பயன்படுத்தி (ஓர் எண்ணில் ஓர் இலக்கம் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தடவை வராமல்), சாத்தியமான எல்லா எண்களையும் அமைத்து ஏற்ற வரிசைப்படுத்துகையில், 3241 எத்தனையாவது இடம்பெறும் ?

(14) 0, 5, 6, 7, 8 என்பவற்றை ஒரு தடவைக்கு மேல் பயன்படுத்தாமல் எத்தனை எண்கள் கண்டுபிடிக்கலாம் ?

(15) ${}_nP_r = (n-r+1)\,({}_nP_{r-1})$ என நிரூபிக்க.

(16) (a) ஒரு மேஜையைச் சுற்றி ஓர் உபசரிப்பாளரும் 4 விருந்தினரும், எத்தனை சார் வரிசைகளில் உட்காரலாம் ?

(b) உபசரிப்பாளர் தன் விருப்பம்போல் அமர்ந்த பின்பு, எத்தனை விதங்களில் விருந்தினரை அமர வைக்கலாம் ?

(17) ஒரு வரிசையில் பையன்களும், பெண்களும் மாறி, மாறி வரும்படி நிற்கின்றனர். 5 பையன்கள், 5 பெண்கள் இருந்தார்களெனில், எத்தனை விதங்களில் அவர்கள் நிற்கலாம் ? அவர்கள் அதேபோன்று ஒரு வட்டமாக நின்றால், எத்தனை விதங்களில் நிற்கலாம் ?

3-3. *சேர்வுகள்* (Combinations)

வரிசை மாற்றத்தில் வரிசையின் அமைப்பில் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளின் இட அமைப்பு முக்கியத்துவம் பெறுகிறது. உதாரணமாக 1, 2, 3, 4 என்ற எண்களைக் கொண்டு, இரண்டு இலக்க எண்கள் அமைப்பதில 31-ம், 13-ம் வெவ்வேறான தனிப்பட்ட எண்கள் எனக் காண்கிறோம்.

பல சமயங்களில், இவ்விட அமைப்பு பொருந்துவதில்லை எனக் காணலாம். ஒரு விருந்திற்கு அழைக்கப்பட்டவர் *A*-ம்,

B-ம் என்பதும் *B*-ம், *A*-ம் என்பதும் ஒரே சோடி மனிதர்களைக் குறிக்கிறது அல்லவா? இட அமைப்புப் பொருந்தாத மாற்றங்கள் சேர்வுகள் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

$S = \{a, b, c\}$ என்ற கணத்தின் உபகணமாக இரு உறுப்புள்ள கணங்கள் எத்தனை கிடைக்கும்? எத்தனை வரிசைச் சோடிகள் எனவும் காண்க.

தீர்வு :

(i) முதல் பகுதியில் அமைக்கப்படும் சேர்க்கைகளைக் காணல் வேண்டும். $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ இரண்டும் ஒரே கணத்தைக் குறிக்கும் எனபதை அறிவோம்.

எனவே, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ என்ற மூன்று இரு உறுப்புக் கணங்கள் கிடைக்கின்றன.

(ii) வரிசைச் சோடியில் இட அமைப்புப் பொருந்துமாதலால் (a, b), (b, a) இவை மாறுபட்ட வரிசைச் சோடிகளாகும் என்பதையும் காண்க.

எனவே, முதற் பகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உட் கணத்தையும், இரு வரிசை செய்யப்பட்ட சோடிகளாக அமைக்க இயலும்.

மொத்தம் $3 \times 2 = 6$ வரிசைச் சோடிகள் கிடைக்கும்.

சேர்க்கைக் குறியீடு

3 பொருள்களிலிருந்து 2 பொருள்களை 3 விதங்களில் எடுக்கலாம். இதனையே குறியீட்டில் ${}_3C_2$ அல்லது $\binom{3}{2}$ என்று குறிப்பிடுகின்றோம். [${}_3C_2$ஐ 3 பொருள்களிலிருந்து இரண்டு இரண்டாக எடுத்தல் எனப்பொருள் கொள்ளவேண்டும்.]

பொதுவாக ${}_nC_r$ அல்லது $\binom{n}{r}$ என்பது n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை ஒரே தடவையில் எடுக்கும் வெவ்வேறு முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு

$_4c_3$, $_4P_3$ இவை எவ்வகையில் தொடர்பு கொண்டவை ?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கணம் $\{a, b, c, d\}$ என்க. முதலில் 4 பொருள்களிலிருந்து 3 பொருள்களை $_4c_3$ வழிகளில் எடுக்கலாம். அவ்வாறு எடுக்கப்பட்ட ஒரு சேர்க்கை $\{a, b, c\}$-யினை எடுத்துக் கொள். இச் சேர்க்கையிலுள்ள உறுப்புகளின் இடத்திற்கு முக்கியத்துவம் கொடுப்பின் இம் மூன்று உறுப்புகளையும் $_3p_3 = 3!$ வழிகளில் வரிசை மாற்றி அமைக்கலாம்.

ஆனால், மொத்தம் $_4c_3$ சேர்வுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு சேர்வுக்கும் 3 ! வரிசை மாற்றங்கள் செய்ய மொத்தம் $_4c_3 \times 3!$ வரிசை மாற்றங்கள் கிடைக்கின்றன. ஆனால், வரையறைப்படி $_4P_3$ வரிசை மாற்றங்களுக்குச் சமம்.

$$\therefore \quad _4P_3 = {_4c_3} \times 3!$$

$_nC_r$-ன் மதிப்பு காண்

n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை $_nc_r$ வழிகளில் சேர்வுகளாக எழுதலாம். இதில் உள்ள ஒவ்வொரு சேர்விலும் r உறுப்புகள் உண்டு. எனவே, அந்த r உறுப்புகளையும் வரிசைகளில் r வழிகளில் மாற்றி அமைக்கலாம்.

எனவே, $_nc_r$ சேர்க்கைகளையும் $_nc_r \times r!$ வழிகளில் வரிசைகளாக மாற்றி எழுதலாம்.

$$\therefore \quad _nc_r \; r! = {_nP_r}$$

$$_nc_r = \frac{_nP_r}{r!}$$

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$_nc_r = \frac{n!}{(n-r)!\; r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}$$

[குறிப்பு :

$$_nc_n = 1; \quad _nc_1 = n; \quad _nc_0 = \frac{n!}{0!\; n!}$$

$$= 1 \; (\because 0! = 1)]$$

எடுத்துக்காட்டு

$_8C_3$ ஐ இரு வழிகளில் மதிப்பீடு செய்.

தீர்வு:

$$\text{(i)}\quad {}_8C_3 = \frac{{}_8P_3}{3!} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 56$$

$$\text{(ii)}\quad {}_8C_3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 56$$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு சமதளத்தில் உள்ள n பல கோணத்திற்கு எத்தனை மூலை விட்டங்கள் ?

ஏதேனும் இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடுகளின் எண்ணிக்கை $= {}_nC_2$ இதில் n பக்கங்களும் அடங்கியுள்ளன.

எனவே, மொத்த மூலை விட்டங்கள் $= {}_nC_2 - n$

எடுத்துக்காட்டு

15 பேர், 12 பேர் உள்ள இரு குழுக்களிலிருந்து ஒரு கிரிக்கெட் ஆட்டத்திற்கு 11 விளையாட்டு வீரர்களும், இருமாற்று ஆட்டக்காரரும் தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

செயல்கள்	கிடைக்கும் தனித்த வழிகள்
15 பேர் குழுவிலிருந்து 6 பேரைத் தேர்ந்து எடுத்தல்.	$_{15}C_6$
12 பேர் குழுவிலிருந்து 4 பேரைத் தேர்ந்து எடுத்தல்.	$_{12}C_4$
மீதி $(15+12)-(6+4)=17$ பேர்களிலிருந்து, எந் நிபந்தனைக்குட்படாது 1 ஆட்டக்காரரையும், 2 மாற்று ஆட்டக்காரர்களையும் தேர்ந்தெடுத்தல்.	$_{17}C_3$

முதல் குழுவிலிருந்து குறைந்தது 6 பேரும், இரண்டாம் குழுவிலிருந்து குறைந்தது 4 பேருமாக இருக்குமாறு, எத்தனை விதங்களில் ஆட்டக் குழுவினைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

மொத்தம் $= {}_{15}C_6 \times {}_{12}C_4 \times {}_{17}C_3$ வழிகளில் ஆட்டக்காரர்களைத் தேர்ந்து எடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

7 ஆண்கள், 4 பெண்கள் இவர்களிலிருந்து 6 பேர்கள் கொண்ட ஒரு குழு அமைக்க வேண்டும். குழுவில் குறைந்தது, இரு பெண்கள், இரு ஆண்கள் இடம் பெற வேண்டுமாயின் எத்தனை வகைகளில் குழுக்கள் அமைக்க முடியும்?

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு 6 பேர் கொண்ட குழுக்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் மாற்று முறைகள்:

(i) 2 பெண்கள், 4 ஆண்கள் அல்லது

(ii) 3 பெண்கள், 3 ஆண்கள் அல்லது

(iii) 4 பெண்கள், 2 ஆண்கள்.

இவற்றினை முறையே,

(i) ${}_4C_2 \times {}_7C_4$ வழிகளிலும்

(ii) ${}_4C_3 \times {}_7C_3$ வழிகளிலும்

(iii) ${}_4C_4 \times {}_7C_2$ வழிகளிலும் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எனவே குழுக்கினை, ${}_4C_2 \times {}_7C_4 \times {}_4C_3 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 \times {}_7C_2$ மொத்த வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$\overline{{}_nC_r} = \overline{{}_nC_{n-r}}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\overline{{}_nC_r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

$$\overline{{}_nC_{n-r}} = \frac{n!}{(n-r)!\ (n-n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\ \ r!}$$

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

மாற்றுவழி

n உறுப்புகள் கொண்ட கணத்தினை r உறுப்புகள், $(n-r)$ உறுப்புகள் முறையே கொண்ட இரு உட்கணங்களாகப் பிரிவு செய்யலாம்.

உட்கணத்தை எடுக்க $(n-r)$ உறுப்புகள் கொண்ட உட்கணம் இருக்கும்.

எனவே, n பொருள்களிலிருந்து r பொருள்களை எடுத்தலும், அல்லது n பொருள்களிலிருந்து $(n-r)$ பொருள்களை எடுத்தலும் ஒன்றே.

$\therefore \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

[குறிப்பு : r-ன் மதிப்பு n-க்கு அருகில் உள்ள பொழுது ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ என்ற மெய்க்கூற்றினைப் பயன்படுத்தி மதிப்புக் காணல் எளிது.

$$\text{(எ-டு.)} \quad {}_{100}C_{98} = {}_{100}C_2 = \frac{100 \times 98}{2} = 5 \times 98 = 4950]$$

பயிற்சி 3-3.

(1) ஓர் இசைக் கலைஞர் 8 பாடல்களிலிருந்து 5 பாடல்களைத் தேர்ந்தெடுக்க விரும்புகிறார். (i) எத்தனை வழிகளில் பாடல்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படலாம்? (ii) எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பாடல்கள் பாடப்படலாம் ?

(2) எம் மூன்று புள்ளியும் ஒரு கோட்டில் அமையாதவாறு உள்ள 12 புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணங்கள் எத்தனை ?

(3) $n \in N$ எனில், $\binom{n}{7} = \binom{n}{5}$ என்றால் தீர்வுக் கணம் காண்க.

(4) ${}_nC_x = {}_nC_y$, எனில் $x = y$ அல்லது $x + y = n$ எனச் சரிபார்க்க.

(5) ${}_nP_r = 720$, ${}_nC_r = 120$ எனில், r என்ன?

+ 2 க —3

(6) $^{100}C_r = {}^{100}C_{3r}$ எனில், r என்ன?

(7) $^{100}C_r = {}^{100}C_{r+20}$ எனில், $^rC_{40}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(8) தளத்தில் உள்ள 20 புள்ளிகளில் 6 புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் உள்ளன. அவ்விருபது புள்ளிகளை இணைத்து 176 வெவ்வேறான நேர்கோடுகள் உண்டாக்கலாம் என நிரூபிக்க.

(9) ஒரு 10 பக்க பல கோணத்தின் மூலை விட்டங்களின் எண்ணிக்கையினைக் காண்க.

(10) 8 இணைகோடுகளும், அவற்றிற்குச் செங்குத்தாக 5 இணைகோடுகளும் உள்ளன. மொத்தம் எத்தனை செவ்வகங்கள் உண்டாக்கப் பெறும் எனக் காண்க.

(11) ஒரு கலனில் 7 கறுப்புப் பந்துகளும், 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் இருந்தன. இவற்றிலிருந்து 4 பந்துகள் எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம்? இவற்றில், 3 கறுப்புப் பந்துகள் உள்ள தேர்வுகள் எத்தனை?

(12) ஒரு பாங்கியில் ஒரு மேலாளர், ஓர் உதவி மேலாளர், மற்றும் 10 பேர்கள் உள்ளனர். இவர்களைக் கொண்டு 4 பேர் அடங்கிய ஒரு கமிட்டியினை (i) மேலாளர், (ii) மேலாளர் மட்டும், உதவி மேலாளர் இல்லாமல், (iii) மேலாளர், உதவி மேலாளர் இருவரும் இன்றி, எத்தனை விதங்களில் அமைக்கலாம்?

(13) 12 கேள்விகள் கொண்ட வினாத்தாள் 6 கேள்விகள் கொண்ட இரு பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு பிரிவிலிருந்து 5 கேள்விகட்கு மேல் விடையளிக்கக் கூடாது எனில், மொத்தம் எத்தனை விதங்களில் 7 கேள்விகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம்?

(14) 6 ஆசிரியர்கள் 4 மாணவர்களிலிருந்து 7 பேர் அடங்கிய ஒரு குழு அமைக்கப்படுகிறது.

(i) குறைந்தது ஒரு மாணவன் உள்ளவாறு,

(ii) ஆசிரியர் பெரும்பான்மையினராக இருக்கும்படி எத்தனை விதங்களில் குழுவினைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம் ?

(15) A, B, C, D, E, F என்பவர் ஆறு மாணவர்கள்.

(i) C, D அடுத்தடுத்து இல்லாதவாறு எத்தனை வழிகளில் அவர்களை உட்கார வைக்கலாம் ?

(ii) C எப்பொழுதும் உள்ளவாறு 4 பேர் அடங்கிய குழுவினை எத்தனை விதங்களில் அமைக்கலாம் ?

(iii) C உள்ளவாறும், D விலக்கப்பட்டும் நால்வர் அடங்கிய குழுவினை எத்தனை விதங்களில அமைக்கலாம் ?

(16) பஸ் ஒன்றில் 9 பேர் முன்புறமும், 6 பேர் பின்புறமுமாக 15 பேர் செல்லலாம். மூன்று பேர் பின்புறமும் இருவர் முன்புறமும் செல்ல மறுத்தால், 15 பயணிகளை முன், பின் புறம் என்ற முறையில் எத்தனை விதங்களில் பிரித்து வைக்கலாம் ?

(17) 16 பேர் விருந்துக்கு அழைக்கப்பட்டிருந்தனர். பக்கத்துக்கு எட்டுப் பேராக ஒரு மேஜையின் இரு பக்கமும் அமர வேண்டும். குறிப்பிட்ட 3 பேர்கள் ஒரு பக்கம் அமரவும், மற்ற இருவர் எதிர்ப்புறம் அமரவும் விருப்பம் தெரிவித்தனர் எனில், விருந்தினர்களை $_{11}C_5 \times 8\,! \times 8\,!$ விதங்களில் அமர்த்தலாம் எனக் காட்டுக.

(18) இரு இரயில் சந்திப்புகளுக்கு இடையே 10 இரயில்கள் உள்ளன. அடுத்தடுத்த நிலையங்களில் நில்லாதவாறு ஏதேனும் 4 நிலையங்களில் நிற்கும் வண்ணம் ஒரு புகைவண்டி நிற்கும் நிலையங்களை எத்தனை வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கலாம் ?

3-4. பாஸ்கலின் முக்கோணம்

இறுதியாக, ஒரு கணத்திலிருந்து, வெவ்வேறான உட்கணங்களை எத்தனை உருவாக்கலாம் எனப் பார்ப்போம்.

$D=${சுதா, வசந்தி, முத்து, பாலு, குமார்} என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இந்த 5 நபர்களிலிருந்து, 0, 1, 2, 3, 4, 5 எண்ணிக்கையுள்ள குழுக்கள் அமைகக்கும் வழிகளாவன.

(1) ${}_5c_0=1$ (2) ${}_5c_1=5$ (3) ${}_5c_2=10$

(4) ${}_5c_3=10$ (5) ${}_5c_4=5$ (6) ${}_5c_5=1$

${}_nc_r$ என்பதை $\binom{n}{r}$ என்றும் எழுதலா மென்பதை நினைவு கூர்க.

$$\text{மொத்த உட்கணங்கள்} = \binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$$
$$=1+5+10+10+5+1$$
$$=32.$$

இதே போன்று 4 உறுப்புகளுள்ள கணத்தின் உபகணங்கள்

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$$
$$=1+4+6+4+1$$
$$=16$$

எனவே, n உறுப்புகளுள்ள கணத்தின் உபகணங்கள்

$(n=0, 1, 2, 3, \ldots\ldots)$

$n=0$	$\binom{0}{0}$
$n=1$	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
$n=2$	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
$n=3$	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$
$n=4$	$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$
$n=5$	$\binom{5}{0}$ $\binom{5}{1}$ $\binom{5}{2}$ $\binom{5}{3}$ $\binom{5}{4}$ $\binom{5}{5}$

இம் முக்கோண வரிசை அமைப்பு பாஸ்கலின் முக்கோண மெனப்படும். பிளெய்ஸ் பாஸ்கல் எனற (1623—1662) பிரெஞ்சுக் கணித அறிஞர் இதனை வெளியிட்டதாகக் கருதப்பட்டாலும், அவர்க்கு நெடுங்காலம் முன்னரே 14ஆம் நூற்றுண்டு சீனக் கணித அறிஞர் சென்ஷீகீ என்பவர்க்கும், அவருக்கும் முன்னர் கி.மு. மூன்றும் நூற்றுண்டில் வாழ்ந்த இந்திய மேதை பிங்களருக்கும், இவ்வுண்மை தெரிந்திருந்ததாக அறியப்படுகிறது.

சேர்வுகளின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட நமக்குக் கிடைக்கும் முக்கோணம் பின்வருமாறு:

$n=0$ 1

$n=1$ 1   1

$n=2$ 1   2   1

$n=3$ 1   3   3   1

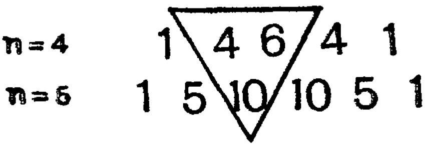
$n=4$ 1   4   6   4   1

$n=5$ 1   5   10   10   5   1

இவ்வமைப்பில் எண்களிடை ஒரு தொடர் பண்பு இருப்பதைக் காணலாம்.

ஒவ்வொரு நிரையிலும், முதல், கடைசி எண்கள் 1. மற்ற எண்கள் யாவும் அருகில் உள்ள இரு எண்களைக் கூட்டி எழுதுவதால் கிடைப்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக



படம் 3-3.

அதாவது, $n=5$ நிரையில் உள்ள மூன்றாவது உறுப்பாகிய 10ஐ, $n=4$ நிரையில் உள்ள 2ஆவது, 3ஆவது உறுப்புகளைக் கூட்டி எழுதக் கிடைப்பதாகும்.

(அ-து.) $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

பொதுவாக பாஸ்கலின் விதி

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

என்பதனை நிரூபிக்க இயலும்.

எடுத்துக்காட்டு

$n=6$ எனில், கிடைக்கும் நிரையினைக் காண்.

தீர்வு :

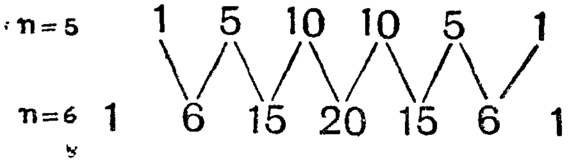
$n=5$-க்குச் சொந்தமான நிரையினை இதற்குப் பயன்படுத்தலாம்.

$n=5$ 1   5   10   10   5   1

அடுத்த நிரையில் முதல் எண் 1-ல் ஆரம்பமாகும்.

இரண்டாவது எண்ணாக $1+5=6$ கிடைக்கும்.
மூன்றாவது எண்ணாக $5+10=15$ கிடைக்கும்.
நான்காவது எண்ணாக $10+10=20$ கிடைக்கும்.
ஐந்தாவது எண்ணாக $10+5=15$ கிடைக்கும்.
ஆறாவது எண்ணாக $5+1=6$ கிடைக்கும்.
ஏழாவது எண்ணாக $1=1$ கிடைக்கும்.

இதனையே கீழ்க்கண்ட படம் மூலம் நன்கு புரிந்து கொள்ளலாம்.



படம் 3-4

எனவே	$n=6$:	1	6	15	20	15	6	1
மாற்று வழி : $n=6$ தரும் நிரை	:	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$
	:	1	6	15	20	15	6	1

எடுத்துக்காட்டு

$\binom{n}{r}$ என்பதன் வாய்பாட்டைப் பயன்படுத்தி

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$$ என்பதனைச் சரிபார்க்க.

இடப்புறம் $= \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

வலப்புறம் $= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

$$= \frac{(n-1)}{(n-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left(\frac{1}{(n-r)} + \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!}\left(\frac{n}{r\,(n-r)}\right)$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \text{இடப்புறம்.}$$

பயிற்சி 3-4.

(1) $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ என நிரூபிக்க.

(2) $n = 1, 2, 3 \ldots\ldots 9$ என்ற மதிப்புகட்கு பாஸ்கலின் முக்கோணம் அமைக்க.

(3) ஒவ்வொரு நிரையிலும் முதலிலிருந்து rஆவது உறுப்பும் கடைசியில் இருந்து rஆவது உறுப்பும் சமமாக இருப்பதேன் ?

(4) ஆறு உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கணத்தின் மொத்த உட்கணங்கள் எத்தனை ?

(5) $(x+a)^n$ என்பதன் விரிவில் உள்ள குணகங்களைக் காணப் பாஸ்கலின் முக்கோணம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. உதாரணமாக

$$(x + a)^3 = 1 . x^3 + 3 . x^2 . a + 3 . x . a^2 + 1 . a^3$$

x, a இரண்டின் அமைப்பினைக் கவனிக்க. இதன் உதவியால், $(x+a)^4$, $(x+a)^5$ என்பவற்றை விரித்தெழுதுக.

(6) மெய்யா, மெய்யற்றவையா எனக் கூறுக.

(a) $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$ (b) $\binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{6}{3}$

(c) $\binom{5}{3} + \binom{6}{2} = \binom{6}{3}$

(7) x-ன் மதிப்புக் காண்க.

(a) $\binom{7}{x} + \binom{7}{4} = \binom{8}{4}$

(b) $\binom{7}{x} + \binom{7}{4} = \binom{8}{5}$

(c) $\binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{x}{3}$

(d) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = \binom{10}{x}$

(8) ${}^{n}c_{r} + {}^{n}c_{r-1} = {}^{n+1}c_{r}$ என நிரூபிக்க.

(9) $x > 7$ எனின்,

${}^{n-1}c_{3} + {}^{n-1}c_{4} = {}^{n}c_{3}$ என நிரூபிக்க.

4. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை

4·1. கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையின் தத்துவம்

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை என்பது கணிதத்தில் ஒரு நிரூபண முறையே யாகும். இம் முறைக்கும், இயல் எண்களின் கணத்திற்கும், நெருங்கிய தொடர்பு உண்டு. இயல் எண் 1-ல் தொடங்கி, அடுத்த எண்களை $1+1=2$, $2+1=3$, $3+1=4$, ...என்ற முறையில் முன்னுறுப்போடு, 1ஐக் கூட்ட அமையப் பெறுகிறது.

1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$,.......n, என்றவாறு N கணம் முழுவதையும் உருவாக்க முடியும். இப்பண்பு, N கணத்தின் அடிகோள்களின் ஒன்றாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையினை மேற்கொள்ளும்போது, நாம் பின்வரும் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம். இயலெண்களை உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணம் S-ல் 1 (ஓர்) உறுப்பாகவும், மேலும் $k \in S$ எனில், k-ன் பின்னி $(k+1)$ஐ உறுப்பாகவும் பெற்றிருந்தால், S என்ற கணத்தில் எல்லா இயலெண்களும் அடங்கியுள்ளன. இங்கு, ஒவ்வொரு n-க்கும் $p(n)$ என்ற பண்பு இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். $p(n)$ ஆனது, எல்லா n-களுக்கும் $(n \in n)$ மெய்யாக இருக்கலாம்; அல்லது $p(n)$ பண்பானது, சில 'n'-களுக்கு மட்டும் மெய்யாகவும், மற்றும் சில 'n'-களுக்கு மெய்யற்றதாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $p(n)$: (n^2+n+1) ஓர் ஒற்றைப் படை எண்ணாகும் என்ற கூற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். $p(n)=n^2+n+1$ என்ற பண்பு எல்லா $n \in N$-க்கும் மெய்யா எனச் சோதிப்போம்.

$n=1, 2, 3$......என மதிப்புகளைப் பிரதியிட $p(n)$ ஓர் ஒற்றைப் படை எண் என்ற பண்பு மெய் எனத் தெரிகிறது. ஆனால், இவ்வாறு குறிப்பிட்ட சில n-களின் மதிப்பை மட்டும் வைத்துக்

கொண்டு $p(n)$ என்ற பண்பு எல்லா n-களுக்கும் மெய் என்ற முடிவுக்கு வர இயலாது.

எடுத்துக்காட்டு

$p(n)$: n^2+n+1 ஒரு பகாவெண் என்ற பண்பினை எடுத்துக் கொள்க.

$p(1)$:	$1^2+1+1=3$	பகாவெண்
$p(2)$:	$2^2+2+1=7$	பகாவெண்
$p(3)$:	$3^2+3+1=13$	பகாவெண்
$p(4)$:	$6^2+6+1=43$	பகாவெண்

இவற்றைக் கொண்டு, $p(n)$: n^2+n+1 ஒரு பகாவெண் என்பது எப்பொழுதும் மெய் என்பதற்கில்லை.

ஏனென்றால், $p(4)$: $4^2+4+1=21$ ஒரு பகா எண் என்பது மெய்க்கூற்றல்ல எனக் காண்கிறோம்.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறை இது போன்ற தவறான முடிவுக்கு வருதலைத் தவிர்க்க உதவும்.

$p(n)$: n^2+n+1 ஓர் ஒற்றைப் படை எண்.

$n=1$. $p(1)$: 1^2+1+1 ஓர் ஒற்றைப்படை எண்; $p(1)$ மெய்.

$n=2$. $p(n)=2^2+2+1$ ஓர் ஒற்றைப்படை எண்; $p(2)$ மெய்.

ஆனால், எந்த n-க்கும் $p(n)$ மெய்யா என்பதை எப்படிக் காண்பது?

பியேனோவின் இயல் எண்களின் அடிகோள்களில் இரண்டு:

1. 1 (ஓர்) இயலெண்
2. k இயலெண்ணானால், $(k+1)$ ஓர் இயலெண்ணாகும்.

இவற்றைக் கொண்டு, இயலெண் கணத்தையும், $p(1)$, $p(2)$,......$p(n)$ என்ற பண்புகளின் கணத்தையும், 1 — 1 என்று பொருத்த இயன்றால், n-ன எம் மதிப்பிற்கும் $p(n)$ மெய்யாகும் என்பதே கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையின் அடிப்படையாகும்.

இதன்படி,

(1) $p(1)$ மெய்யென்றும்

(2) $p(k)$ மெய்யானால், $p(k+1)$ மெய்யென்றும் நிரூபித்தால், $p(n)$ எந்த $n (n \in N)$-க்கும் மெய்யாகும் என நிரூபித்ததற் கொப்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$p(n) : n^2+n+1$ ஓர் ஒற்றைப்படை எண்.

$p(1) = 1^2+1+1 = 3$ இது ஓர் ஒற்றைப்படை எண். இது மெய்.

$p(k) : k^2+k+1$ ஓர் ஒற்றைப்படை எண் என்பது மெய்யெனக் கொள்வோம்.

$p(k+1) = (k+1)^2+(k+1)+1$

$= (k^2+2k+1+k+2)$

$= (k^2+k+1)+2k+2$

$= (k^2+k+1)+2(k+1)$

= (ஒற்றைப்படை எண்) + இரட்டைப்படை எண்.
($\because$ k^2+k+1 ஓர் ஒற்றை)

= ஓர் ஒற்றைப்படை எண்.

(1) $p(1)$ மெய்

(2) $p(k) \rightarrow p(k+1)$

எனவே, $p(n) : n^2+n+1$ ஓர் ஒற்றைப்படை எண் என்பது,

$n (n \in N)$-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் மெய்யாகும்.

செயல்முறை வழிகள் :

கொடுக்கப்பட்ட பண்பு $p(n)$ எல்லா $n \in N$-களுக்கும் மெய்யா எனக் காண

(i) $n = 1$ எனும்போது பண்பினைச் சோதிக்க.

(ii) $n=k$-க்குப் பண்பு மெய்யெனக் கொண்டு, $n=(k+1)$-க்கும் பண்பு மெய்யா எனச் சோதனை செய்து பார்.

இதில் (i); (ii) இரண்டும் மெய்யெனில் எல்லா $n \in N$-ன் மதிப்புகளுக்கும் கூற்று மெய் எனத் தெரியும். (i) அல்லது (ii) எவ்வேயேனும் ஒன்று மெய்யல்ல எனினும், $p(n)$ பொதுவாக மெய்யல்ல எனக் கூறலாம்.

4-2. எடுத்துக்காட்டு

முதல் 'n' இயலெண்களின் கூடுதலையும், முதல் 'n' இயலெண்களின் வர்க்கங்களின் கூடுதல், முதல் 'n' இயலெண்களின் படி 3-ன் கூடுதல் இவற்றைக் கணிதத் தொகுத்தறிதல் தத்துவ முறையினைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

(i) 'n' ஒரு மிகை முழு எண் எனில், $\sum_{n=1}^{n} n = 1+2+\ldots\ldots+n$ $=\frac{1}{2}n(n+1)$ என நிரூபிக்க.

நிரூபணம் :

$p(n)$: $1+2+3+\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ **என்க.**

$n=1$ ஆனால்,

$p(1)$: $1=\frac{1}{2}\cdot 1(1+1)=1$ இது மெய்.

$p(k)$ என்பது மெய்யெனக் கொள்வோம்.

$p(k)$: $1+2+3+\ldots\ldots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

$(k+1)$ஐ இரு பக்கமும் கூட்ட

$$1+2+3+\ldots\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\therefore\ p(k+1) : 1+2+3+\ldots\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

மெய்யெனக் காண்கிறோம்.

$p(1)$ மெய்

$p(k) \to p(k+1)$

$\therefore \; p(n): \quad 1+2+3+\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad (n \in N)$ மெய்யாகிறது.

(ii) n ஒரு மிகை முழு எண் எனில்,

$$\sum_{1}^{n} n^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ என

நிரூபிக்க.

நிரூபணம் :

$p(n): \quad 1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ எனக.

$n=1$ எனும்போது, $p(1) = 1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6} = 1$

இது மெய்.

$p(k)$ மெய்யெனக் கொண்டால்,

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$(k+1)^2$ ஐ இரு பக்கமும் கூட்ட

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{6}\left[2k^2+k+6k+6\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k^2+7k+6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$\therefore \; p(k) \to p(k+1)$

$\therefore \; p(n) : \; \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; (n \in N)$

(iii) n ஒரு மிகை முழு எண் எனில்

$\sum_{1}^{n} n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ எனக் காட்டுக.

நிரூபணம் :

$p(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ என்க.

$n = 1$ எனில் $p(1) : \; 1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$; இது மெய்.

$p(k)$ மெய்யெனில்,

$p(k) : \; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

இருபுறமும் $(k+1)^3$ஐக் கூட்ட,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$\therefore \; p(k) \rightarrow p(k+1)$

$\therefore \; p(n) : \; \Sigma n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \; (n \in N)$

பயிற்சி 4-1.

கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையினைப் பயன்படுத்திக் கீழ்க் காணும் மெய்க் கூற்றுகளை நிரூபிக்க: (n ஒரு மிகை முழு எண்.)

(1) $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + 2n = n(n+1)$

(2) $1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

(3) $1.3+2.4+3.5+\ldots\ldots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

(4) $1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(5) $b^m.\ b^n=b^{m+n}$

(6) $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2n+1}$

(7) $3n \geq (1+2n) \quad (n \geq 1)$

(8) (n^3-n)ஐ 6 வகுக்கும்.

(9) $(5^{2n}-1)$ஐ 24 வகுக்கும்.

(10) $(7^{2n}-1)$ஐ 48 வகுக்கும்.

(11) ஒரு சதுரங்கப் போட்டியில் n மாணவர்களில் ஒவ்வொருவரும், மற்ற ஒவ்வொருவருடனும் விளையாடினர் எனில், கணிதத் தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி மொத்தம் எத்தனை விளையாட்டுகள் (போட்டிகள்) நடந்திருக்கும் எனக் காண்க.

5. தொடர்முறைகளும் தொடர்களும்

5-1. தொடர்முறை, தொடர்

ஒரு கிரிக்கெட் ஆட்டக்காரர் 5 ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்கள் முறையே 16, 37, 43, 70, 107 என்போம். முதல் ஓட்டத்தில் 16 ஓட்டங்களும், இரண்டாம் ஓட்டத்தில் 37 ஓட்டங்களும் இதேபோல பிற ஆட்டங்களில் எடுத்த ஓட்டங்களையும் வரிசைப்படுத்தி இங்குக் கொடுக்கப்படுகிறது. ஓர் எண்கள் தொகுப்பில் இவ்விதமாக முதல், இரண்டாம்,...என்று வரிசைப் படுத்திக் கொடுத்தால் அவ்வெண் தொகுப்பைத் தொடர் முறை என்கிறோம்.

மேலும் ரூ 200-20-800 என்ற ஊதிய விகிதத்தில் ஒருவர் வேலையில் அமர்த்தப்பட்டார் எனில், முதல் வருடம் ரூ. 200.00, இரண்டாம் வருடம் ரூ. 220.00......என்று அவர் மாத ஊதியம் ஆண்டிற்காண்டு மாறி வருவதைக் காண்கிறோம். ரூ. 200, 220, 240, 260,......780, 800 என்ற தொடர் முறை அவரது மாறும மாத ஊதியத்தைக் குறிக்கிறது.

மேற்கண்ட இரு உதாரணங்களிலும் கண்ட தொடர்முறைகள் முடிவு பெறும் தொடர்முறைகள் ஆகும்.

இவற்றினின்று ஒரு முடிவுள்ள, அல்லது முடிவிலாக் கணத்தின் எண்கள் எல்லாவற்றையும், 1 ஆவது, 2 ஆவது, 3 ஆவது...என்று ஏதாவது ஒரு வரையறுக்கப்பட்ட வரிசையில் குறிக்கக் கிடைப்பது தொடர் முறை ஆகும். தொடர் முறையில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணையும் தொடர் முறையின் உறுப்பு என்கிறோம். t_n என்பது தொடர் முறையில் n ஆவது உறுப்பாகும்.

எனவே, ஒற்றைப்படை இயல் எண்களைப்பொறுத்த தொடர் முறையில் முதல் உறுப்பு 1, இரண்டாம் உறுப்பு 3,... இவற்றைக் குறியீடுகள் மூலம் எழுதினால் $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5, \ldots$

தொடர் முறையில் உள்ள உறுப்புகளின் கூடுதலைத் தொடர் என்கிறோம்.

(எ-டு.)

(1) $200 + 220 + 240 + \ldots + 800.$

(2) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$

முதலாவது முடிவுள்ள தொடர். இரண்டாவது முடிவிலாத் தொடர்.

பைபோனுசியின் தொடர்களுக்கான எடுத்துக்காட்டுகள்

1202-ல் பைசாவைச்சேர்ந்த பைபோனுசி என்றழைக்கப்பட்ட லியோனுர்டு என்பவர் எலிகளின் இனப்பெருக்கம் பற்றிய சோதனையில் ஈடுபட்டிருக்கும்போது அதனுல் கிடைக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் யாவும். ஒரு வியக்கத்தக்க தொடர் முறையில் அமைவதைக் கண்டார். இவ்வெண்கள் பைபோனுசி எண்கள் எனப்படும்.

ஒரு சோடி இளம் எலிகளை ஒரு மாதத்திற்கு வைத்திருந்தால் அடுத்த ஒரு மாதத்தில் அவை வளர்ந்து பெரிய எலிகளாகி விடும். (இங்கு எந்த எலியும் சோதனைக களத்தில் சாவதில்லை என எடுத்துக்கொள்வோம்.) பெரிய எலிகளான ஒரு மாததகில் ஒவ்வொரு சோடி எலியும் ஒரு சோடி எலிகளை ஈன்றெடுக்கும். இவ்வாறு வளரும் எலிகளின் இனப்பெருக்கத்தை ஆய்ந்தபொழுது மாதந்தோறும் உள்ள எலிகளின் சோடிகளின் எண்ணிக்கை 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... என்ற ஒரு தொடர்முறையில் இருப்பதைக் கண்டார். (ஒரு குடும்ப மரம் வரைந்து இதனைச் சரிபார்க்க.)

இவ்வெண்கள்

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 = 3$

$2 + 3 = 5$

$3 + 5 = 8$

$5 + 8 = 13$

....

....

என்ற அமைப்பிலுள்ளன.

∴ பைபோனுசியின் தொடர் முறை

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... என்பதாகும்.

இதில் $t_1 = 1$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 5$ ...

பயிற்சி 5-1.

(1) 1, 3, 5, 7,... என்ற தொடர் முறையை $N \rightarrow R$ என்பதன் சார்பாக அமைக்க.

(2) 1, 6, 11, 16, 21, ... என்ற தொடர் முறையின் 6ஆவது, 7ஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

(3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ என்ற தொடரின் 5ஆவது உறுப்பு என்ன?

(4) கீழ்க்கண்ட தொடர் முறைகளில் அடுத்த உறுப்பைக் காண்க.

(a) 8, 5, 2 (b) 2, 6, 8

(c) 256, 128, 64 (d) 1×2, 2×3, 3×4

(e) 2, 6, 10, 14, 18 (f) 2, 5, 9, 14

(g) 1, 3, 7, 15, 31 (h) 1, 4, 5, 9, 14

5-2 கூட்டுத் தொடர் முறை

1, 3, 5, 7........

100, 95, 90, 85, ... ஆகிய தொடர் முறைகளை ஆயும் பொழுது,

அடுத்தடுத்துள்ள இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசம் சமமாகவே உள்ளன எனக் காண்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

முதல் தொடர் முறையில்

$t_1 = 1$

$t_2 = 3 = t_1 + 2$

$t_3 = 5 = t_2 + 2$

$t_4 = 7 = t_3 + 2$

....

இரண்டாவது தொடர் முறையில்

$t_1 = 100;\ t_2 = 95 = t_1 - 5;\ t_3 = 90 = t_2 - 5; \ldots\ldots$

இவை கூட்டுத் தொடர் முறைகளெனப்படும். கூட்டுத் தொடர் முறையில் ஓர் உறுப்பு முன்னைய உறுப்போடு ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும். அக குறிப்பிட்ட எண் பொது வித்தியாசம் எனக் கூறப்படும்.

முதல் உறுப்பு a என்றும், பொது வித்தியாசம் d என்றும் கொண்டால், கூட்டுத்தொடர் $a,\ a+d,\ a+2d, \ldots$ என்பதாகும்.

மேற்கண்ட இரு எடுத்துக்காட்டுகளிலும் முறையே

(i) $a = 1,\ d = 2$

(ii) $a = 100,\ d = -5$ என்பது தெளிவு.

ஒரு தொடர் முறையில், அடுத்துள்ள எந்த இரு உறுப்புகளின் வித்தியாசமும் சமமாக இருந்தால் அத் தொடர்முறை கூட்டுத் தொடர்முறை எனப்படும். கூட்டுத் தொடர்முறையை A. P. (Arithmetic Progression) எனக் குறிக்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots\ldots$

(ii) $100 + 95 + 90 + 85 + \ldots\ldots\ldots$

முதலியன கூட்டுத் தொடர்கள் ஆகும்.

A.P.-ன் மேலும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்

(iii) சாலையில் ஒரு பக்கத்திலுள்ள 15, 17, 19, 21,...... என இலக்கமிட்ட வீடுகள்.

(iv) ஒருவர் மாதா மாதம் ரூ 100 செலுத்தும் தவணை முறையில் ரூ. 1800 பெறுமானமுள்ள தட்டெழுத்து இயந்திரம் வாங்கினார். அவர் மாத நிலுவைக் கடன் 1800, 1700, 1600,...

5-3. ஒரு A.P-ன் nஆவது உறுப்பு

2, 4, 6, 8, ...தொடர் முறையில் ஆறாவது உறுப்பு என்ன? 1, 3, 5, 7, ...என்ற தொடர் முறையில் 10ஆவது, 100ஆவது உறுப்புகள் யாவை?

இவற்றைக்காணும் முறையினைக் காண்போம்.

ஒரு A.P.-ல் t_1, t_2, t_3, ...முறையே முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது, ... உறுப்புகள் எனில்,

$t_1 = a$ (முதல் உறுப்பு)

$t_2 = a+d = a+\overline{2-1}\,d$ (d, பொது வித்தியாசம்)

$t_3 = a+2d = a+\overline{3-1}\,d$

$t_4 = a+3d = a+\overline{4-1}\,d$

இவற்றினின்று

$t_n = a+(n-1)d$ எனக்காண முடிகிறது.

$t_n = a+(n-1)d$ என்ற சூத்திரம் n-ன் எல்லா இயலெண் மதிப்புகளுக்கும் பொருந்தும் எனக் கணிதத் தொகுத்தறி முறையில் நிறுவலாம்.

'a' முதல் உறுப்பென்றும், d பொது வித்தியாசம் என்றும் எடுத்துக்கொண்டு $n=2$ எனில்,

$t_2 = a+(2-1)d = a+d$

$n=2$-க்கு இச் சூத்திரம் மெய்யாகிறது.

$n=k$ -க்கு $t_n = a+(n-1)d$ மெய்யெனக் கொள்வோம்.

$t_k = a+\overline{k-1}\,d$

இருபுறமும் dஐக் கூட்ட

$t_k+d = a+\overline{k-1}\,d+d$

$= a+kd$

$= t_{k+1}$ ஆகும்.

எனவே, t_k மெய்யெனில் t_{k+1} மெய்யே. $n=2$-க்கு மெய் யெனக் கண்டோம். எனவே, கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி

$$t_n = a + \overline{n-1}\, d$$

எல்லா $n \in N$-க்கும் மெய்யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு A.P.-ல் ஏழாவது, ஒன்பதாவது உறுப்புகள் முறையே 16, 20 எனில், nஆவது உறுப்பு என்ன?

தீர்வு :

a முதல் உறுப்பு என்றும், d பொது வித்தியாசம் என்றும் கொள்வோம்.

$$t_7 = a + 6d = 16 \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$t_9 = a + 8d = 20 \qquad \ldots \qquad (2)$$

(2) − (1) $\quad 2d = 4$

$$d = 2$$

(1)−ல் பிரதியிட $a = 4$

எனவே nஆவது உறுப்பு $t_n = 4 + 2\,(n-1)$

$$= 2 + 2n$$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல்கள் $S_n = n^2$ எனில், அத் தொடர் ஒரு A.P.-ல் அமையும் என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$S_n = t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ என்க.

$$S_{n+1} = t_1 + t_2 + \ldots + t_n + t_{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = t_{n+1}$$

(அ-து.) $(n+1)^2 - n^2 = t_{n+1}$

(அ-து.) $\quad t_{n+1} = 1 + 2n$

(அ-து.) $\quad t_n = 1 + (n-1)\,2$

$$t_{n+1} - t_n = 2$$

எனவே, $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ ஒரு தொடர்,

எடுத்துக்காட்டு

சாலையின் ஒரு பக்கத்தில் உள்ள வீடுகளின் இலக்கங்கள் முறையே 17, 19, 21 ... முதல் வீட்டில் 17 என்றும் கடைசி வீட்டில் 97 என்றும் குறிக்கப்பட்டு இருப்பின், மொத்த வீடுகள் எத்தனை?

இங்குப் பொது வித்தியாசம் $d = 2$. மொத்தம் n வீடுகள் உள்ளன என்க.

எனவே n ஆவது வீடு 97.

$$t_n = a + \overline{n-1}\, d$$
$$97 = 17 + (n-1)\, 2$$
$$2n = 82$$
$$n = 41$$

பயிற்சி 5-2.

(1) K-க்கு என்ன மதிப்பு இருந்தால் கீழ்க்கண்ட தொடர் முறைகள் A. P. ஆகும்?

(a) 3, 6, K (b) 12, 8, K

(c) 15, K, 13 (d) K, 17, 23

(2) கீழ்ககண்ட தொடர் முறைகளில் வேண்டிய உறுப்பினை காண்க :

(a) 4, 7, 10,........., 35ஆவது உறுப்பினைக் காண்க.

(b) −5, −8, −11,...., 10ஆவது உறுபபினைக் காணக.

(c) 2, 2.5, 3, 3·5, ..., 23ஆவது உறுப்பினைக காணக.

(d) 20, 18, 16, ..., 40ஆவது உறுபபினைக காணக.

(e) 3, 10, 17,..........., nஆவது உறுப்பினைக காண்க.

(f) 3×5, 4×6, 5×7...., 16ஆவது உறுபபினைக காணக.

(3) 5 + 11 + 17 + 23 + ... என்ற கூட்டுத் தொடரின் 40ஆவது உறுப்பென்ன?

(4) (a) 3, 5, 7,... என்ற தொடர்முறையில் 83 எத்தனையாவது உறுப்பு?

(b) 2·06, 2·02, 1·98,... என்ற தொடர் முறையில் 0·78 எத்தனையாவது உறுப்பு?

(5) (a) 4, 6, 8, 10, ... 28 என்ற தொடர் முறையில் உள்ள மொத்த உறுப்புகள் எத்தனை?

(b) −6, −3, 0, ... 30 என்ற தொடர் முறையில் உள்ள மொத்த உறுப்புகள் எத்தனை?

(6) ஒரு தொடரின் nஆவது உறுப்பு $(4n-1)$ ஆனால், அது A.P.-ல் அமையும் என நிரூபிக்க.

(7) கொடுக்கப்பட்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர் முறையில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் ஒரு நிலையெண் கூட்டப்பட்டால் கிடைக்கப்பெறும் தொடர் முறையும் கூட்டுத் தொடர் முறையாக அமையும் என நிரூபிக்க.

(8) A. P.-ல் உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 27. அவற்றின் பெருக்கற் பலன் 504 எனில், அவ் வெண்களைக் காண்க.

(9) A.P.-ல் உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் 21. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் 179 எனில், அவ் வெண்களைக் காண்க.

(10) ரூ.200-20-800 என்ற ஊதியத்தில் அமர்த்தப்பட்டவர் உச்ச ஊதியத்தை எத்தனை ஆண்டுகளில் அடைவார்?

(11) 3 + 8 + 13 + 18 + ... என்ற தொடரில் 302 ஓர் உறுப்பா?

(12) ஒரு A.P.-ல் $t_{12} = 48$, $t_8 = 2t_4$ எனில், t_9ஐக் கண்டுபிடிக்க.

(13) ஒரு A.P.-ல் $t_4 : t_7 = 2 : 3$ எனில், $t_3 : t_{11}$ காண்க.

(14) 14ஆவது, 19ஆவது உறுப்புகள் முறையே 80, −110 எனக்கொண்ட A.P.-ன் முதல் மற்றும் nஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

(15) ஒரு A.P.-ல் pஆவது உறுப்பு q, qஆவது உறுப்பு p எனில், (i) rஆவது உறுப்பு (ii) pqஆவது உறுப்பு (iii) $(p+q)$ ஆவது உறுப்பு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(16) ஒரு A.P.-ல் pஆவது உறுப்பின் p மடங்கும், qஆவது உறுப்பின் q மடங்கும் சமம் எனில், $(p+q)$ஆவது உறுப்பு பூச்சியம் எனக் காட்டுக.

(17) ஒரு A.P.-ல் $t_p = a, \quad t_q = b, \quad t_r = c$ எனில்,

(i) $a(q-r) + b(r-p) + c(p-q) = 0$ என்றும்,

(ii) $p(b-c) + q(c-a) + r(a-b) = 0$ என்றும் காட்டுக.

5–4. A.P.-ன் உறுப்புகளின் கூடுதல்

ஜெர்மானிய கணித மேதை கார்ல் பிரடரிக்காஸ் (1777—1855) தொடக்கப் பள்ளியில் படிக்கும்போது ஆசிரியர் மாணவர்களை 1 முதல் 100 வரையுள்ள இயல் எண்களின் கூடுதற் பலனைக் காணுமாறு பணித்தார். பிற மாணவர்கள் எண்களை எழுதிக் கூட்டிக்கொண்டு திண்டாடிக் கொண்டிருக்கையில், காஸ் மட்டும் 5050 என்ற விடையைக் கண நேரத்திற்குள் கூறியது ஆசிரியரை வியப்பில் ஆழ்த்தியது. காஸ் கடைப்பிடித்த முறையானது : 1 + 2 + ... + 99 + 100 தொடரில் முதல் எண்ணையும் கடைசி எண்ணையும் கூட்ட 1 + 100 = 101. இரண்டாவது எண்ணையும் கடைசியில் இருந்து இரண்டாவது எண்ணையும் கூட்ட 2 + 99 = 101; இவ்வாறே 3 + 98, 4 + 97, ... என்று மொத்தம் 50 சோடி 101-கள் கிடைக்கின்றன. அவற்றின் கூடுதற்பலன் $50 \times 101 = 5050$ எனக் காஸ் கணக்கிட்டார். காஸின் முறையைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 \ldots 99 + 100$$

மேலும் $S_{100} = 100 + 99 + 98 \ldots 2 + 1$ (திருப்பி எழுத)

$2 S_{100} = 101 + 101 + 101 \ldots 101 + 101$ (கூட்ட)

$$= 100 \times 101$$

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

இம் முறையினைப் பயன்படுத்தி $a, a+d, a+2d \ldots a+\overline{n-1}d \ldots$ தொடர் முறையின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனைக் காணபோம்.

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a+\overline{n-2}d) + (a+\overline{n-1}d)$$

மேலும்,

$S_n = (a+\overline{n-1}d) + (a+\overline{n-2}\,d) + \ldots + (a+d) + a$ (திருப்பி எழுத)

$2S_n = (2a+\overline{n-1}d) + (2a+\overline{n-1}d) + \ldots + (2a+\overline{n-1}d) + (2a+\overline{n-1}d)$ (கூட்ட)

$$= n\,(2a+\overline{n-1}d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d) \qquad \ldots \quad (1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{a+(a+\overline{n-1}d)\}$$

$= \frac{n}{2}$\{முதல் உறுப்பு + nஆவது உறுப்பு\} ... (2)

இவ்வாறு n உறுப்புகளுக்கான கூடுதல் பலனைக் காணும் வாய்பாடுகளைக் கணித தொகுததறி முறையில் சரிபார்ப்போம்.

S_n என்ற வாய்பாடு $p(n)$ என்ற பண்பைக் குறிக்கிறது என்க.

$n = 1$ எனில்

$S_1 = \frac{1}{2}[2a+0] = a$ இது மெய்.

எனவே $p(1)$ மெய்.

$n = k$ என்பதற்கு $p(n)$ மெய்யெனில்

$$S_k = \frac{k}{2}(2a+\overline{k-1}d)$$

இருபக்கமும் $(k+1)$ஆவது உறுப்பாகிய $a+kd$ யைக் கூட்ட

$$S_{k+1} = S_k + (a+kd) = \frac{k}{2}(2a+\overline{k-1}d) + a + kd$$

$$= ka + \frac{k(k-1)}{2}d + a + kd$$

$$= (k+1)a + \frac{kd}{2}(k-1+2)$$

$$= (k+1)a + \frac{k(k+1)}{2}d$$

$$= \frac{(k+1)}{2}(2a+kd)$$

எனவே $p(k)$ மெய்யெனில், $p(k+1)$ மெய்யெனக் காண்கிறோம். $p(1)$ மெய்யெனக் கண்டோம். கணிதத் தொகுத்தறி முறைப்படி $p(n)$: $S_n = \frac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d)$, எல்லா $n \in N$-களுக்கும் மெய்யாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒருவர் மாதம் ரூ. 80/- வீதம் 60 மாதங்கள் செலுத்துகிறார். அதற்குத் தனிவட்டி 6% கொடுக்கப்படுகிறது. 5 வருட முடிவில் கிடைக்கும் தொகை என்ன?

முதல் மாதம் செலுத்திய ரூ. 80-க்கு 60 மாத வட்டியும்,

இரண்டாம் மாதம் செலுத்திய ரூ. 80-க்கு 59 மாத வட்டியும்

மூன்றும் மாதம் செலுத்திய ரூ. 80-க்கு 58 மாத வட்டியும்

... ...

... ...

59 ஆம் மாதம் செலுத்திய ரூ. 80-க்கு 2 மாத வட்டியும்
(59,60ஆம் மாதத்திற்குரியது)

60 ஆம் மாதம் செலுத்திய ரூ. 80-க்கு 1 மாத வட்டியும்
(60ஆம் மாதத்திற்கு)

கிடைக்கும்.

மொத்தம் கிடைக்கும் வட்டி, ரூ. 80-க்கு $(1+2+3+\ldots+60)$ மாதங்களுக்கு 6% வீதம் ஆகும்.

$$1+2+3+\ldots+60=\frac{60\times 61}{2} \text{ மாதங்கள்} = \frac{60\times 61}{2\times 12} \text{ வருடங்கள்}$$

$$\text{வட்டி} = \text{ரூ. } \frac{80\times 60\times 61}{2\times 12}\times\frac{6}{100} = \text{ரூ. } 732$$

செலுத்திய தொகை = ரூ. 80×60 = ரூ. 4800

எனவே, கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை = ரூ. 5532

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு A.P.-ன் மொத்த உறுப்புகள் 15. அவற்றின் கூடுதல் 390. முதல் உறுப்பு 5 எனில், பொது வித்தியாசத்தையும் நடு உறுப்பையும் காண்க.

தீர்வு :

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a+\overline{n-1}\,d)$$

$$S_n = 390\ ;\ a = 5$$

$$390 = \frac{15}{2}[2\times 5 + 14\,d]$$

$$\therefore 10+14d = 390\times\frac{2}{15} = 52$$

$$\Longrightarrow d = 3$$

நடு உறுப்பு $= a + 7d$

$= 5 + 7 \times 3$

$= 26$

எடுத்துக்காட்டு

500-க்கும், 1000-க்கும் இடையேயுள்ள 13 ஆல் வகுபடும் எண்கள் எத்தனை?

தீர்வு :

தேவையான முதல் உறுப்பு $a = 507 = (13 \times 39)$

தேவையான கடைசி உறுப்பு $t_n = 988 = (13 \times 76)$

$$d = 13$$

$$t_n = a + \overline{n-1}\, d$$

$$507 + \overline{n-1}.13 = 988$$

$$13n + 494 = 988$$

$$n = \frac{494}{13} = 38$$

மொத்தம் 38 எண்கள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு

இரு A.P.-களின் n உறுபபுகளின் கூடுதல்கள் $(7n+1) : (4n+2)$ என்ற விகிதத்தில் அமைத்தால, அவற்றின் 21 ஆவது உறுப்புக்ளின் விகிதம் என்ன?

தீர்வு :

முதல் A P.-ல் a_1 = முதல உறுப்பு

d_1 = பொது வித்தியாசம்

S_n = n உறுபபுகளின் கூடுதல் என்றும்;

இரண்டாவது A.P.-ல் a_2 = முதல் உறுப்பு

d_2 = பொது வித்தியாசம்

S_n'' = n உறுப்புகளின் கூடுதல் என்றும் கொள்க.

$$S_n : S_n'' = (7n + 1):(4n + 2)$$

காணவேண்டியது $t'_{21} . t''_{21}$

$$t'_{21} : t''_{21} = (a_1 + 20d_1) : (a_2 + 20d_2)$$

$$= \frac{41}{2}[2a_1 + 40d_1] : \frac{41}{2}[2a_2 + 40d_2]$$

$$= S_{41}' : S_{41}''$$

$$= (7 \times 41 + 1) : (4 \times 41 + 2)$$

$$= 288 : 166$$

$$= 144 : 83$$

பயிற்சி 5-3.

(1) n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு A.P.-ல் முதல் உறுப்பு a என்றும், கடைசி உறுப்பு l என்றும் இருப்பின், தொகு முறையைப் பயன்படுத்தி

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

என நிரூபிக்க

(2) 5% தனிவட்டி வீதத்தில் 1–1–78-ல் 1000 ரூபாய் செலுத்தினால் 1-1-89-ல் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகை என்ன? கணக்கில் 2000 ரூபாய் எந்த நாளில் இருக்கும்?

(3) ரூ 400 – 20 – 1000 என்ற ஊதிய விகிதத்தில் 20 வருடத்தில் என்ன ஊதியம் கிடைக்கும்?

(4) கூடுதல் காண்க:

(i) 8 + 13 + 18 + .. , 23 உறுப்புகள்.

(ii) 101 + 99 + 97 ... + 47

(iii) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{a} + \ldots$, 20 உறுப்புகள்.

(iv) $\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots$

n உறுப்புகள்.

(v) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \ldots + 7$

(vi) $t_n = 5n + 1$ எனில், n உறுப்புகள்.

(vii) 2-க்கும் 42-க்கும் இடைப்பட்ட ஒற்றைப்படை எண்கள்.

(viii) $3 + 4 + 8 + 9 + \ldots$, 20 உறுப்புகள்.

(5) (i) $1 + 6 + 11 + \ldots$ தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 616 கிடைக்கும்?

(ii) $230 + 227 + 224 + \ldots$ தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 4200 கிடைக்கும்?

(6) 200-க்கும் 400-க்கும் இடையில் உள்ள

(i) 7ஆல் வகுபடும் எண்கள்,

(ii) 7ஆல் வகுபடாத எண்கள்

ஆகியவற்றின் கூடுதல் பலன்களைக் காண்க.

(7) $100 + 99 + 98 + \ldots$ தொடரில் 30 தொடர்ச்சியான எண்களின் கூடுதற்பலன் 1155 ஆனால், எந்த எண்ணிலிருந்து தொடங்கும்?

(8) A.P.-ல் 13ஆவது உறுப்பு 3. முதல் 13 உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் 234 எனில் பொது வித்தியாசத்தையும் முதல் 25 உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனையும் காண்க.

(9) 54, 51, 48... என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளைக் கூட்டினால் 513 கிடைக்கும்? இரு விடைகளுக்கான காரணங்கள் என்ன?

(10) இயலெண்களை

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

என்று தொகுத்தெழுதினால் 50ஆவது நிறையில் உள்ள எண்களின் கூடுதற் பலனென்ன?

(11) இயலெண்களை 1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9; என்று பிரிவு படுத்தப்படுகின்றன. n ஆவது பிரிவிலுள்ள எண்களின் கூடுதற்பலன் $(n-1)^3 - n^3$ எனக் காட்டுக.

(12) ஒரு A.P.-ல் $S_m = S_n$, $m \neq n$ எனில், $S_{m+n} = 0$ எனக்காட்டுக.

(13) ஒரு A.P-ன் முதலுறுப்பு p, இரண்டாம் உறுப்பு q, கடைசி உறுப்பு r எனில், அத் தொடரின் கூடுதல்

$$(q + r - 2p)\ (p + r)/2\ (q - p)$$

எனக் காட்டுக.

(14) ஒரு A.P.-ல் m உறுப்புகளின் கூடுதல்பலன் n-ம், n உறுப்புகளின் கூடுதல்பலன் m-ம் ஆனால், $(m+n)$ உறுப்புகளின் கூடுதல் $-(m+n)$ என நிறுவுக.

5-5. பெருக்குத் தொடர்

கூட்டுத் தொடரில் ஒவ்வோர் உறுப்புடனும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணைக் கூட்ட அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கப் பெறுகிறதெனக் கண்டோம்.

ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணால் பெருக்கி அடுத்த உறுப்பை அமைக்க முற்படுவோம்.

(எ-டு) 1, 3, 9, 27,... இத் தொடர் முறையில் ஓர் உறுப்பை 3ஆல் பெருக்க அடுத்த உறுப்பு கிடைக்கிறது

இத்தகைய தொடர் முறை *பெருக்குத் தொடர்* (G.P.) என்றழைக்கப்படுகிறது. அக் குறிப்பிட்ட நிலையெண் பொது விகிதமெனப்படும்.

'a' முதல் உறுப்பாகவும், 'r' பொது விகிதமாகவும் ஒரு G.P.-ல்இருந்தால், அத் தொடர்முறை $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 \ldots$ என்பதாகும். இவற்றின் கூடுதற்பலன் $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ என்பது பெருக்குத் தொடர் ஆகும். முதல் உறுப்பு a ஆகும். n ஆவது உறுப்பு ar^{n-1} என எளிதாகக் காணலாம்.

(எ-டு.) (1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

$$t_1 = a = 1, \quad r = \frac{1}{2}$$

(2) $3, -6, 12, -24, \ldots$

$$t_1 = a = 3, \quad r = -2$$

$$\left[\frac{t_2}{t_1} = \frac{-6}{3} = -2\right]$$

எடுத்துக்காட்டு

உயிரணுக்கள் இரண்டிரண்டாகப் பிரிந்து வளர்கின்றன. ஒரு செல் ஒரு மணியில் 2 புதிய செல்களாகப் பிரிந்தால், 30 மணிக்குப் பிறகு எத்தனை செல்கள் இருக்கும்?

தீர்வு :

கடந்த நேரம்	0	1	2	3	...	30
செல்களின் எண்ணிக்கை	1	2	4	8	...	?

$$t_1 = 1;\ t_2 = 2,\ t_3 = 4 \ldots\ a = 1,\ r = 2.$$

நாம் காணவேண்டியது t_{31}

$$t_{31} = ar^{30} = 1 \times 2^{30}$$

$\therefore\ t_{31} = 2^{30}$ செல்கள்

எடுத்துக்காட்டு

0·03 + 0·06 + 0·12 + … + 1·92 என்ற பெருக்குத் தொடரில் எத்தனை உறுப்புகள் உள்ளன?

தீர்வு

$t_1 = a = 0{\cdot}03$

$r = \frac{0{\cdot}06}{0{\cdot}03} = 2$

nஆவது உறுப்பு 1·92 என்க.

$t_n = ar^{n-1}$

$1{\cdot}92 = (0{\cdot}03)\, 2^{n-1}$

$2^{n-1} = \frac{1{\cdot}92}{0{\cdot}03} = \frac{192}{3} = 64 = 2^6$

$\therefore n-1 = 6 \Longrightarrow n = 7$

1·92 தொடரின் 7ஆவது உறுப்பாகும்.

பெருக்குத் தொடரின் கூடுதற்பலன்

ஒரு பெருக்குத் தொடரின் முதல் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனைக் காண்போம்.

$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ....(1)

$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n$ ....(2)

(1) − (2)

$S_n (1-r) = a - ar^n = a(1-r^n)$

$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ ($r \neq 1$ என இருத்தல் வேண்டும்)

$S_n = a\,\frac{1-r^n}{1-r}$ என்ற இவ்வாய்ப்பாட்டினைத் தொகுத்தறி முறைமூலம் சரிபார்த்துக் கொள்வோம்

+ 2 க 4

$p(n)$ என்ற பண்புதான் $S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$ எனில்,

$n=1$ எனும்போது $S_1 = a\frac{1-r^1}{1-r} = a$. எனவே $p(1)$ மெய்.

$p(n)$ ஆனது $n = k$-க்கு மெய்யெனில்,

$$p(k): \; S_k = a\,\frac{1-r^k}{1-r}$$

இருபக்கமும் $(k+1)$ஆவது உறுப்பைக் கூட்ட

$$S_{k+1} = S_k + ar^k = a\left(\frac{1-r^k}{1-r}\right) + ar^k$$

$$= a\,\frac{(1-r^{k+1})}{1-r}$$

எனவே, $p(k)$ மெய்யெனில் $p(k+1)$ மெய்யாகும்.

எனவே, எல்லா $n \in N$-களுக்கும்

$$p(n): \; S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \text{ மெய்.}$$

[குறிப்பு: $r < 1$ஆனால்

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$r > 1$ஆனால்

$$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$$

$r = 1$ எனில், S_n என்ன என ஆராய்க.]

முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரின் கூடுதல் பலன் காணல்

$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots$ என்ற பெருக்குத் தொடரில் முதல் 10000 உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனைக் காண்போம்.

$$a = 1 \; ; \; r = \frac{1}{10} = \cdot 1$$

$$S_{10000} = 1\frac{\{1-(\cdot 1)^{10000}\}}{1-0\cdot 1}$$

$\cdot 1^2 = \cdot 01 \; ; \quad \cdot 1^3 = \cdot 001 \; ; \quad \cdot 1^4 = \cdot 0001 \ldots$

$1 - \cdot 1^2 = \cdot 99 \; ; \quad 1 - \cdot 1^3 = \cdot 999 \; ; \quad 1 - \cdot 1^4 = \cdot 9999 \ldots$

$\cdot 1^n$ என்பதில் n-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க $(1 - \cdot 1^n)$-ன் மதிப்பு 1-க்கு நெருக்கமாக வருவதைக் காண்கிறோம். எனவே, n-ன் மதிப்பு மிகப் பெரியதாக இருக்கும்பொழுது $(1 - \cdot 1^n)$-ன் தோராய மதிப்பு 1 எனக் கொள்ளலாம்.

$$\text{எனவே } S_{10000} \simeq \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

n உறுப்புகள் கொண்டதும், $|r| < 1$-எனவும் உள்ள ஒரு பெருக்குத் தொடரில்

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

$|r| < 1$ எனில், n-ன் மதிப்பு அதிகரிக்க அதிகரிக்க r^n-ன் மதிப்புக் குறைந்து கொண்டே பூச்சியத்தை நெருங்கும். மிகப்பெரும் n-களுக்கு $r^n = 0$ எனலாம். முடிவிலாப் பெருக்குத் தொடரில்

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ எனக் காண்கிறோம்.}$$

எடுத்துக்காட்டு

ஒருவங்கியில் 5% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் ஆண்டு தோறும் ரூ. 500 வீதம் 10 ஆண்டிற்குச் செலுத்தினால் 10 ஆண்டுக் கடைசியில் கிடைக்கும் தொகை என்ன?

தீர்வு :

$A = P(1+i)^n$

$P =$ ரூ. $500 \; ; \quad i = \cdot 05$

முதல் ஆண்டு செலுத்தும் ரூ. 500-க்கு 10 ஆண்டு வட்டியும், இரண்டாம் ஆண்டு செலுத்தும் ரூ. 500-க்கு 9 ஆண்டு வட்டியும், இதுபோல அடுத்த தவணைகளுக்கும் வட்டி கிடைக்கும்.

$$A = \text{ரூ. } 500\,(1{\cdot}05)^{10} + 500(1{\cdot}05)^{9} + \ldots 500(1{\cdot}05)$$

$$= \text{ரூ. } 500\,[1{\cdot}05 + 1{\cdot}05^{2} + 1{\cdot}05^{3} + \ldots 1{\cdot}05^{10}]$$

$$= \text{ரூ. } 500 \times 1{\cdot}05 \times \left(\frac{1{\cdot}05^{10} - 1}{1{\cdot}05 - 1}\right)$$

$$= \text{ரூ. } \frac{525}{{\cdot}05}\,[1{\cdot}629 - 1]$$

$$= \text{ரூ. } 10500 \times {\cdot}629$$

$$= \text{ரூ. } 6606$$

எடுத்துக்காட்டு

$5 + 55 + 555 + \ldots n$ உறுப்புகளின் கூடுதல் என்ன?

தீர்வு :

$$S_n = [5 + 55 + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= 5\,[1 + 11 + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= \frac{5}{9}\,[9 + 99 + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= \frac{5}{9}\,[(10-1) + (100-1) + \ldots n \text{ உறுப்புகள்}]$$

$$= \frac{5}{9}\,[(10 + 10^{2} + 10^{3} + \ldots 10^{n}) - (1 + 1 + 1 + \ldots n \text{ உறுப்புகள்})$$

$$= \frac{5}{9}\left[10\frac{(10^{n}-1)}{10-1} - n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10}{9}(10^{n}-1) - n\right] = \frac{50}{81}(10^{n}) - \frac{50}{81} - \frac{5^{n}}{9}$$

எடுத்துக்காட்டு

0·444 என்ற சுழல் தசம பின்னத்திற்குப் பொருந்தி விகித முறு எண்ணைக் காண்க.

தீர்வு :

$$S = 0{\cdot}444\cdots$$

$$= 0{\cdot}4 + 0{\cdot}04 + 0{\cdot}004 + 0{\cdot}0004 + \ldots$$

$$a = \frac{4}{10}\ ;\ r = \frac{1}{10}$$

எனவே, $S = \dfrac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{4}{9}$

எடுத்துக்காட்டு

$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனிற்கும் முடிவிலா உறுப்புகளின் கூடுதற் பலனிற்கும் உள்ள வித்தியாசம் 10^{-5} விடக் குறைவாக இருக்க n-ன் மதிப்பு என்ன இருக்க வேண்டும் ?

தீர்வு :

இங்கு $a = \frac{1}{3}\ ;\ r = \frac{1}{3}$

$$\therefore\ S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$$

$$S - S_n < 10^{-5}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3^n.2} < \frac{\cdot 1}{10^5}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2.3^n} < \frac{1}{10^5}$$

$$\Longrightarrow 10^5 < 2.3^n$$

$$\Longrightarrow 3^n > \frac{100000}{2} = 50000$$

$$\Longrightarrow n \log 3 > \log 50000$$

$$\Longrightarrow n > \frac{\log 50000}{\log 3}$$

$$\Longrightarrow n > \frac{4\cdot 6990}{0\cdot 4771} = 9 + \text{பின்னம்}$$

எனவே n-ன் மதிப்பு குறைந்தது 10 ஆக இருக்கவேண்டும்.

பயிற்சி 5·4.

(1) கீழ்க்கண்ட G.P.-ல் x-ன் மதிப்பு என்ன?

(a) 3, 18, x (b) x, 7, 28

(c) 9, x, 81 (d) x, -6, 30

(2) (a) 2, 4, 8, ... என்ற G.P.-ல் 16ஆவது உறுப்பு என்ன?

(b) 28, 14, 7, ... என்ற G.P.-ல் 8ஆவது உறுப்பு என்ன?

(c) 4, -12, 36, ... 6 உறுப்புகளுள்ள G.P.-ல் கடைசி உறுப்பு என்ன?

(3) 2048 ச. செமீ. உள்ளவாறு ஒரு சம பக்க முக்கோணம் வரையப்பட்டது. பின்பு பக்கங்களின் மையப்

புள்ளிகளைச் சேர்த்து மற்றொரு முக்கோணம் உண்டாக்கப் பெற்றது. இவ்வாறே தொடர்ந்து மையப்புள்ளிகளைச் சேர்த்து பல முக்கோணங்கள் உண்டாக்கப் பெற்றன. இவ்வாறு வரையப்பட்ட 6ஆவது முக்கோணத்தின் பரப்பு என்ன?

(4) 10 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு மரம் ஒவ்வொரு வருடமும் முந்தைய வருடத்தின் உயரத்தை விட 10% அதிகரிக்கிறது எனில், 20 வருடம் கழித்து மரத்தின் உயரம் என்ன?

(5) 1934-ல் ஒரு நகரத்தின் மக்கள் தொகை 40,000. மக்கள்தொகை ஆண்டுக்கு 5% அதிகமாகிறது. ஒவ்வோர் ஆண்டுத் தொடககத்திலுமுள்ள மக்கள்தொகை ஒரு G.P.ஆகும் எனக் காட்டுக. 1977 ஆம் ஆண்டில் மக்கள்தொகை என்ன?

(6) ஒரு G.P.–ல் உள்ள தொடர்ந்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் 19, பெருக்கற்பலன் 216 எனில், அந்த எண்களைக் காண்க.

(7) ஒரு G.P.-ல் உள்ள தொடர்ந்த மூன்று உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் 7. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் பலன் 21 எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(8) (i) $\frac{1}{729}$ ஆனது $9 + 3 + 1 + \ldots$ என்ற G.P.-ல் எத்தனையாவது உறுப்பு ஆகும்?

(ii) 729 ஆனது $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + 9 + \ldots$ என்ற G.P.-ல் எத்தனையாவது உறுப்பு ஆகும்?

(9) ஒரு G.P. ல் முதல் உறுப்பின் வர்க்கம் மூன்றாவது உறுப்பாகும். 5ஆவது உறுப்பு 64 எனில், G.P. ஐக் கண்டுபிடிக்க.

(10) (i) $t_5 = 81, \quad t_2 = 24$

(ii) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ldots$

என்ற G.P.-க்களின் nஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

(11) a, b, c, d என்ற எண்கள் G.P.-ல் உள்ளன எனில்,

(i) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ G.P.-ல் அமையும் என்றும்,

(ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

என்றும் நிரூபிக்க.

(12) ஒரு G.P.-ல் $t_p = x$, $t_q = y$, $t_r = z$ எனில், $x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q} = 1$ என நிரூபிக்க.

(13) ஒரு G.P.-ல் $t_{p+q} = m$, $t_{p-q} = n$ எனில், $t_p = \sqrt{mn}$ எனக் காட்டுக.

(14) 4 எண்கள் உள்ள கணத்தில் முதல் மூன்று எண்கள் G.P.-லும் கடைசி மூன்றும் A.P-லும் உள்ளன. A.P-ன் பொது வித்தியாசம் 6. முதல் எண்ணும் கடைசி எண்ணும் சமம் எனில், அந் நான்கு எண்களையும் காண்க.

(15) A.P.-ல் உள்ள மூன்று எண்களின் கூடுதல் பலன் 15. இவ்வெண்களோடு முறையே 1, 4, 19 என்ற எண்களைக் கூட்டக் கிடைப்பது G.P. ஆகும் எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(16) ஒரு G.P.-ல் முதல் 4 உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனும் முதல் எட்டு உறுப்புகளின் கூடுதல் பலனும் 81 : 97 என்ற விகிதத்திலிருந்தால், பொது விகிதத்தைக் காண்க.

(17) $S_n = 3 - \frac{3^n+1}{4^{2n}}$ எனில், முதல் உறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையும் காண்க.

(18) கீழ்க்கண்ட தொடர்களின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் காண்க:

(a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

(b) $4 + 44 + 444 + \ldots$

(c) $\cdot 5 + \cdot 55 + \cdot 555 + \ldots$

(d) $1 + (1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + \ldots$

(e) $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + \ldots$

(19) $\cdot 4\,2\,3\,2\,3\,2\,3\ldots$ என்ற சுழல் தசமத்தின் மதிப்பைக் காண்க.

(20) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ldots$ என்ற தொடரில் எத்தனை உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்ளக் கூடுதற்பலன் $\frac{55}{72}$ கிடைக்கும்?

(21) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots$ என்ற தொடரில் குறைந்தது எத்தனை உறுப்புகளை எடுக்கக் கூடுதற்பலன் 2000ஐ மிகும்?

(22) ஒரு G.P.-ன் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் S; பெருக்கற் பலன் P. உறுப்புகளின் தலைகீழிகளின் கூடுதல் R எனில்,

$$P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$$ என நிரூபிக்க.

(23) கீழ்க்கண்ட முடிவிலாத் தொடர்களின் கூடுதல் பலன் காண்க.

(i) $50 - 40 + 32 - 25\cdot 6 + \ldots$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$

(iii) $7 + \frac{21}{4} + \frac{63}{16} + \ldots$

(24) ஒரு G.P.-ன் முதல் உறுப்பு இரண்டாம் உறுப்பை விட 2 அதிகம். முடிவிலாத் தொடரின் கூடுதல் பலன் 50 எனில், G.P.ஐக் காண்க.

(25) $x = 1 + a + a^2 + \ldots \infty$, $y = 1 + b + b^2 + \ldots \infty$, $|a| < 1$, $|b| < 1$ எனில்,

$$1 + ab + a^2b^2 + \ldots \infty = \frac{xy}{x+y-1}$$

எனக் காட்டுக.

(26) ஒரு பந்து 12 மீ. உயரத்தில் இருந்து நேராகக் கீழே விழுந்தது. அது ஒவ்வொரு முறையும் அது விழுந்த உயரத்தில் $\frac{1}{3}$ பங்கு உயரக் கிளம்பினால், அது நிலைக்கு வரும்வரையில் மொத்தம் 24 மீ. தூரம் பயணம் செய்திருக்கும் எனக் காட்டுக.

(27) முறையே 1, 2, 3,... n ஆகியவற்றை முதல் உறுப்புகளாகவும், முறையே $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n+1}$ ஆகியவற்றைப் பொது விகிதங்களாகவும் கொண்ட முடிவிலா G.P.-க்களின் கூடுதற் பலன் முறையே $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$ ஆனால்,

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_n = \frac{n(n+3)}{2}$$ என நிரூபிக்க.

5-6. இசைத் தொடர் (Harmonic Progression)

ஒரு தொடரில் உள்ள உறுப்புகளின் தலைகீழிகள் கூட்டுத் தொடரில் (A.P.) இருந்தால், அதனை இசைத் தொடர் (H.P.) என்கிறோம்.

சான்றாக, $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots$ தொடர்முறை H.P.-ல் இருக்கிறது. ஏனெனில், அவற்றின் தலைகீழிகள் முறையே 3, 7, 11, ... என்ற தொடர்முறை A.P.-ல் உள்ளன.

$a, a + d, a + 2d, \ldots$ என்பது ஒரு A.P. ஆதலால், ஒரு H.P.ஐ $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \frac{1}{a+4d}, \ldots$ என்று பொதுமைப்படுத்தி எழுதலாம்.

கவனிக்க: $t_n = \frac{1}{a+\overline{n-1}d}$

எடுத்துக்காட்டு

$$2\frac{1}{2} + 1\frac{7}{13} + 1\frac{1}{9} + \frac{20}{23} + \ldots$$ தொடரின் nஆவது உறுப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{5}{2} + \frac{20}{13} + \frac{10}{9} + \frac{20}{23} + \ldots$$ தொடர் ஓர் இசைத்தொடர்.

ஏனெனில், $\frac{2}{5} + \frac{13}{20} + \frac{9}{10} + \frac{23}{20} + \ldots$ ஒரு கூட்டுத் தொடர் ஆகும். இங்கு $a = \frac{2}{5}$, $d = \frac{13}{20} - \frac{2}{5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

எனவே, கூட்டுத் தொடரின்

nஆவது உறுப்பு $= \frac{2}{5} + (n-1)\frac{1}{4}$

$$= \frac{2}{5} + \frac{n-1}{4}$$

$$= \frac{8+5n-5}{20} = \frac{5n+3}{20}$$

$$\therefore \text{ இசைத் தொடரில் } t_n = \frac{20}{5n+3}$$

எடுத்துக்காட்டு

a, b, c, d என்ற எண்கள் H.P-ல் இருந்தால், $ab + bc + cd = 3ad$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

a, b, c, d எண்கள் H.P.-ல் உள்ளன.

எனவே, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} = p$ என்க.

$$\therefore \frac{a-b}{ab} = \frac{b-c}{bc} = \frac{c-d}{cd} = p$$

$$\therefore ab = \frac{a-b}{p} \ ; \ bc = \frac{b-c}{p} \ ; \ cd = \frac{c-d}{p}$$

$$\therefore ab + bc + cd = \frac{1}{p}(a - b + b - c + c - d)$$

$$= \frac{1}{p}(a - d) \qquad \ldots(1)$$

ஆனல், $\frac{1}{a} + p + p + p = \frac{1}{d}$

$$3p = \frac{a-d}{ad} \qquad \ldots(2)$$

(1), (2)-லிருந்து $ab + bc + cd = 3\,ad$ என அறிகிறேம்.

பயிற்சி 5.5.

(1) கீழ்க்கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க:

(a) H.P.-ல் உள்ள தொடர்முறை கொடுக்கப்பட்டால், அதன் உறுப்புகளின் தலைகீழிகள் A.P.-ல் அமையும்.

(b) G.P-ல் தொடர்முறை கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அதன் தலைகீழிகளும் G.P-ல் இருக்கும்.

(2) (a) $\frac{1}{5}, x, \frac{1}{9}$ (b) $3, x, 7$

இவை H.P.எனில், x என்ன?

(3) கீழ்க்கண்ட H.P.களில் nஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

(a) $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{3}{11}, \frac{1}{4}, \ldots$

(b) $2, 1\frac{3}{4}, 1\frac{5}{9}, \ldots$

(4) $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் சமம் எனில், a, b, c H.P-ல் உள்ளன எனக் காட்டுக.

(5) ஒரு H P.-ல உள்ள மூன்று உறுப்புகளின் தலைகீழி களின கூடுதல பலன 9. அவற்றின பெருக்கல பலன $\frac{1}{15}$ எனில், அந்த எண்களைக் காண்க

(6) ஒரு H P -ல 7ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{15}$, 12ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{105}$ எனில, 20ஆவது உறுப்பு $\frac{1}{249}$ எனக் காட்டுக.

(7) $a, b, c,$ ஆகியவை H P -ல இருந்தால,

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$ என நிரூபிக்க.

(8) ஒரு H P-ல $t_l = m, t_m = l$ எனில $tml = 1$ எனக் காட்டுக

5 7 தொடர்களின கூட்டிடைகள

(i) a, b, c ஆகியவை A.P -ல இருந்தால

$b-a = c-b =$ பொதுவித்தியாசம என அறிவோம்.

$$b-a = c-b$$

$$2b = a+c$$

$$b = \frac{a+c}{2} \qquad \text{---(1)}$$

bஐ a, c-க்கு இடையேயான கூட்டுச்சராசரி A.M. என்று வரையறை செய்கிறோம

(எ-டு) 10, 20-க்கு இடையேயான கூட்டுச்சராசரி 15 ஆகும்.

(ii) இதே போன்று a, b, c மூன்றும் H P -ல் இருக்கத் தேவையான நிபந்தனையினைக் காணலாம.

a, b, c, H.P.-ல் இருந்தால்,

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A.P.-ல் இருக்கும்.

எனவே, (1)-ன்படி $\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}$

(அ-து.) $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{a+c}{ac}$

$$b = \frac{2ac}{a+c} \qquad ...(2)$$

a, b, c ஆகிய மூன்றும் H.P.-ல் இருப்பின், b என்பது a, c-க்கு இடையேயான இசை இடை (H.M.) எனக் கூறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{1}{15}$ என்பது $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}$-களுக்கு இடையேயான இசை இடை ஆகும்.

(iii) a, b, c எண்கள் G.P.-ல் உள்ளன என்க.

பொது விகிதம் $= \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac} \qquad ...(3)$$

a, b, c மூன்றும் G.P.-ல் உள்ளவாறு இருப்பின் a, c-களுக்கிடையேயான பெருக்கிடை (G.M.) b என்று கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டாக 5 என்பது 1, 25-களுக்கிடையேயான பெருக்கிடை ஆகும்.

(iv) A, G, H முறையே x, y-களுக்கிடையேயான A. M., G.M., H.M.-களைக் குறிப்பின் A, G, H ஒரு G.P. என நிரூபிக்க:

நிரூபணம்

கூட்டுச் சராசரி $A = \frac{x+y}{2}$

பெருக்கிடை $G = \sqrt{xy}$

இசை இடை $H = \frac{2xy}{x+y}$

$$A \times H = \frac{x+y}{2} \times \frac{2xy}{x \times y}$$

$$= xy$$

$$= G^2$$

$\therefore$ A, H ஆகியவற்றின் பெருக்கிடை G ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$(b+c)$, $(c+a)$, $(a+b)$ ஒரு H.P. எனில், a^2, b^2, c^2 ஒரு A.P. எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$b+c$, $c+a$, $a+b$, H.P.-ல் உள்ளன.

$$\therefore c + a = \frac{2\ (b+c)\ (a+b)}{b+c+a+b}$$

$$= \frac{2\ (ab+b^2+ac+bc)}{2b+a+c}$$

அதாவது $2cb + c^2 + ca + 2ab + ac + a^2 = 2ab + 2b^2 + 2ca + 2cb$

அதாவது $a^2 + c^2 = 2b^2$

அதாவது $b^2 = \frac{a^2+c^2}{2}$

$\therefore$ a^2, b^2, c^2 மூன்றும் A.P.-ல் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

a, b, c மூன்றும் H.P.-ல் இருந்தால்

$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ஒரு H.P-எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

a, b, c மூன்றும் H.P.–ல் உள்ளன.

$\Longrightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ A.P.-ல் உள்ளன.

$\Longrightarrow \frac{a+b+c}{a}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{c}$ A.P.-ல் உள்ளன.

($a+b+c$ ஆல் பெருக்க)

$\Longrightarrow \frac{b+c}{a}+1, \frac{c+a}{b}+1, \frac{a+b}{c}+1$ A.P.-ல் உள்ளன.

$\Longrightarrow \frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ A.P.-ல் உள்ளன (1ஐக் கழிக்க).

$\Longrightarrow \frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ H.P.-ல் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

a, b, c A.P.-யிலும் b, c, d G.P.-யிலும் c, d, e H.P–யிலும் இருப்பின் $c^2 = ae$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

a, b, c A.P.-ல் உள்ளன $\Longrightarrow b = \frac{c+a}{2}$

b, c, d G.P.-ல் உள்ளன $\Longrightarrow c^2 = bd$

c, d, e H.P.-ல் உள்ளன $\Longrightarrow d = \frac{2ce}{c+e}$

$$\therefore c^2 = bd = \frac{(c+a)}{2} \times \frac{2ce}{(c+e)}$$

(அ-து.) $c(c+e) = e(c+a)$

$$c^2 + ce = ce + ae$$

$$c^2 = ae$$

பயிற்சி 5-6.

(1) p, q, r G.P.-ல் இருப்பின்,

(i) $\log_a p, \log_a q, \log_a r$ A.P-ல் இருக்கும் என்றும்,

(ii) $\log_p a, \log_q a, \log_r a$ H.P.-ல் இருக்கும் என்றும் காட்டுக.

(2) x, y-களுக்கிடையேயான A.M., G.M., H.M.ன் முறையே A, G, H ஆனுல் $A > G$ என்றும் $G > H$ என்றும் நிறுவுக.

(3) இரு எண்களுக்கிடையேயான A.M. ஒன்று எனில், அவ்வெண்களின் H.M., அவற்றின் G.M.-ன் வர்க்கம் எனக் காட்டுக.

(4) x, z ஆகியவற்றின் A.M., y என்றும் G.M., ny என்றும் இருந்தால், n^2y அவற்றின் H.M. எனக் காட்டுக.

(5) a, b, c G.P.-யிலும், $a^n = b^y = c^z$ ஆகவும் இருந்தால், n, y, z ஆகியவை H.P.-ல் இருக்கும் எனக் காட்டுக.

(6) இரு எண்களின் A.M. அவற்றின் G.M.ஐவிட இரண்டு அதிகம். H.M. ஆனது அவற்றின் பெரிய எண்ணில் $\frac{1}{5}$ பங்கு எனில், அவ்வெண்களைக் காண்க.

(7) $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ ஆனது a, b-களுக்கிடையேயான (i) H.M. (ii) A.M ஆக இருக்க n-ன் மதிப்பு என்ன?

(8) மூலங்களின் A.M, A என்றும், G.M., G என்றும் உள்ளவாறு x-ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்.

5-8. பல்வகைத் தொடர்கள்

(1) $\sum_1^n n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_1^n n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_1^n n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

என்பவற்றை முன்பே நிரூபித்துள்ளோம். இவற்றையும், மற்றும் தொடர்கள் பற்றி இதுகாறும் கற்றவற்றையும் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளைப் பார்ப்போம்.

எடுத்துக்காட்டு

$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots \infty$ என்ற முடிவிலாத் தொடரின் கூடுதல் பலன் காண்க.

தீர்வு :

இங்கு இருக்கும் உறுப்புகளில் உள்ள எல்லாத் தொகுதிகளும் A.P.-யிலும் எல்லாப் பகுதிகளும் G P.-யிலும் உள்ளதைக் கவனிக்க. வேறு விதமாகக் கூறின் $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ என்ற G.P-ன் ஒவ்வோர் உறுப்பையும் முறையே 1, 3, 5,... என்ற A.P.-ன் உறுப்பினால் பெருக்கத் தொடர் முறை கிடைக்கிறது.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots \infty \text{ மட்டும் } \ldots(1)$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \ldots \qquad \ldots(2)$$

$$(1)-(2) \qquad \frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \ldots \infty \text{ மட்டும்}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \left[\because S_\infty = \frac{a}{1-r}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு

$1.3^2 + 2.5^2 + 3.7^2 + \ldots$ என்ற தொடரில் முதல் 20 உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எடுத்துக்காட்டை

1.3.3 + 2.5.5 + 3.7.7 + ... என்று எழுத ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் மூன்று எண்கள் உள்ளன. ஒவ்வோர் உறுப்பிலும்

உள்ள முதல் எண்களான 1, 2, 3, 4, ... என்பவை 1ஐ முதல் உறுப்பாகவும், 1ஐப் பொது வித்தியாசமாகவும் கொண்டுள்ள ஒரு A.P. இதே போன்று ஒவ்வோர் உறுப்பிலுமுள்ள இரண்டாவது மூன்றாவது எண்களான 3,5,7,...யாவும் ஒரு A.P.($a = 3, d = 2$)-யில் உள்ளன.

nஆவது உறுப்பு $t_n = n\,(2n+1)\,(2n+1)$

$$= 4n^3 + 4n^2 + n$$

$$n = 1 \qquad t_1 = 4.1^3 + 4.1^2 + 1$$

$$n = 2 \qquad t_2 = 4.2^3 + 4.2^2 + 2$$

$$n = 3 \qquad t_3 = 4.3^3 + 4.3^2 + 3$$

$$\ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$n = n \qquad t_n = 4.n^3 + 4.n^2 + n$$

$$S_n = 4\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 4\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 1\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$= 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 20$ ஆனால், $S_2 = 20^2\,(21)^2 + \frac{2}{3}\,20.21.41 + \frac{20.21}{2}$

$$= 188090$$

பயிற்சி 5-7.

(1) கீழ்க்கண்ட முடிவிலாத் தொடர்களின் கூடுதல் பலன்களைக் காண்க:

(a) $\frac{5}{2} + \frac{7}{21} + \frac{9}{63} + \frac{11}{189} + \ldots$

(b) $1 + (1+b)r + (1+b+b^2)r^2 + (1+b+b^2+b^3)r^3 + \ldots$
(r, b இரண்டும் தகு பின்னங்கள்)

(2) n உறுப்புகளின் கூடுதல் காண்க :

(a) 1.2 + 2.3 + 3.4 + ...

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots$

(c) 3.7 + 5.10 + 7.13 + ...

(d) 1.3.4 + 2.4.5 + 3.5.6 + ..

(3) $\frac{1^2}{1} + \frac{1^2+2^2}{1+2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} + \ldots$ n உறுப்புகள்

$= \frac{n(n+2)}{3}$ எனக் காட்டுக.

6. ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

6-1. மிகை முழுஎண் படிக்குறிக்கு ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

சாதாரணப் பெருக்கல்படி

$$(x+a)^1 = x+a$$

$$(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$$

$$(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$$

$$(x+a)^4 = x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$$

$$(x+a)^5 = x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$$

அதாவது $(x+a)^n$ஐ $(n=1, 2, 3, 4, 5)$ விரித்தெழுதும்போது நமக்குக் கீழ்க்கண்ட பண்புகள் புலனாகின்றன.

(1) விரிப்பில் $(n+1)$ உறுப்புகள் இருக்கின்றன.

(2) x-ன் அடுக்குகள் ஒன்றொன்றாகக் குறைய, a-ன் அடுக்குகள் ஒன்றொன்றாகக் கூடுகின்றன.

(3) ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் (x-ன்படி) + (a-ன்படி) $= n$

(4) x^n, a^n ஆகியவற்றின் குணகங்கள் ஒன்று.

(5) முதலிலிருந்தும், கடைசியிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமம்.

(6) குணகங்களின் வரிசை அமைப்பு பாஸ்கல் முக்கோணத்தின் நிரைகளாகும்.

இவற்றை மனத்திற் கொண்டு மிகை முழுஎண் படிக்குறிக்கு ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றததை நிறுவலாம்.

தேற்றம்

$n \in N$ எனில்,

$$(x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} a + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 + \dots$$

$$+ \binom{n}{r} x^{n-r} - a^r + \dots + \binom{n}{n} a^n .$$

நிரூபணம்

இதனை நிறுவ, கணிதத் தொகுத்தறிதல் முறையைப் பயன் படுத்துவோம்.

$$p(n) : (x+a)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \dots \binom{n}{r} x^{n-r}a^r$$

$$+ \dots + \binom{n}{n} a^n$$

(i) $p(1) : \quad (x+a)^1 = \binom{1}{0} x^1 + \binom{1}{1} a^1 = x + a$

இதுமெய்.

(ii) $p(m)$ மெய்யென்க.

எனவே, $(x+a)^m = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}.a$

$$+ \binom{m}{2} x^{m-2}.a^2 + \dots + \binom{m}{m} a^m$$

சமன்பாட்டை $(x+a)$ஆல் பெருக்க,

இடப்புறம் : $(x+a)^m . (x+a) = (x+a)^{m+1}$.

வலக்கைப்பக்கத்து உறுப்புகளை $(x+a)$ ஆல் பெருக்கும் போது, முதல் எல்லா உறுப்புகளையும், xஆல் பெருக்கி எழுதிக் கொண்டு, பின்பு எல்லா உறுப்புகளையும் aஆல் பெருக்கி எழுதிக் கொள்வோம்.

(அ-து.)

வலப்புறம் : $\left\{\binom{m}{0}x^{m+1} + \binom{m}{1}x^{m}a + \binom{m}{2}x^{m-1}.a^{2} + \ldots + \binom{m}{r} x^{m-r}.a^{r+1} + \ldots + \binom{m}{n} xa^{m}\right\}$

$$+ \left\{\binom{m}{0}x^{m}a + \binom{m}{1}x^{m-1}a^{2} + \ldots + \binom{m}{r}x^{m-r}.a^{r+1} + \ldots + \binom{m}{m-1}xa^{m} + \binom{m}{m}a^{m+1}\right\}$$

ஆனால், $nc_r = nc_{n-r}$

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = 1 = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$$

எனவே x^{m+1}, a^{m+1}-களின் குணகங்களை $\binom{m+1}{0}$, $\binom{m+1}{m+1}$ என்று எழுதலாம்.

மேலும், x^{m-r+1}. a^{r} உறுப்புகளின் கூடுதலை எழுத, அவற்றின் குணகங்களின் கூடுதலான

$$\binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} = \binom{m+1}{r} \qquad \text{(பாஸ்கல் விதிப்படி)}$$

எனவே,

$$(x+a)^{m+1} = \binom{m+1}{0} x^{m+1} + \ldots + \binom{m+1}{r} x^{m+1-r} a^{r} + \ldots + \binom{m+1}{m+1}a^{m+1}$$

$$\therefore \quad p(m) \rightarrow p(m+1).$$

எனவே, தொகுத்தறி முறைப்படி எல்லா $n \in N$-களுக்கும், $p(n)$ மெய்யாகும்.

குறிப்பு :

(1) $(x+a)^{n}$ விரிவில் $(r+1)$ ஆம் உறுப்புப் பொது உறுப்பு எனப்படும்.

$$t_{r+1} = nc_r\, x^{n-r}, a^{r}$$

(2) $(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nc_r\, x^{n-r} a^r$

(3) $(x-a)^r = [x+(-a)]^r$

$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nc_r\, x^{n-r} (-a)^r$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^r\, {}_nc_r\, x^{n-r}.\ a^r$$

(4) $(1+x)^n = {}_nc_0 + {}_nc_1x + {}_nc_2x^2 + \dots + {}_nc_nx^n$

$= 1 + {}_nc_1x + {}_nc_2\, x^2 + \dots + x^n.$

எடுத்துக்காட்டு 1

$(5x - y^2)^4$ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு :

$$(5x - y^2)^4 = (5x)^4 + {}_4c_1\ (5x)^3 (-y^2) + {}_4c_2\ (5x)^2 (-y^2)^2 + {}_4c_3\, (5x)^1 (-y^2)^3 + {}_4c_4\, (5x)^0\ (-y^2)^4$$

$${}_4c_1 = {}_4c_3 = 4; \quad {}_4c_2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$$

$$\therefore (5x-y^2)^4 = 5^4\, x^4 + 4\cdot 5^3\, x^3\, (-y^2) + 6.5^2.\ x^2.\ y^4 + 4\cdot 5.x.\, (-y^6) + 1.1.\ (y^8)$$

$$= 625\, x^4 - 500n^3\, y^2 + 150x^2\, y^4 - 20xy^6 + y^8$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

$(1\cdot 03)^6$–ன் மதிப்பை 5 தசமஸ்தானத் திருத்தமாகக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு :

$(1\cdot 03)^6 = (1 + 0\cdot 03)^6 = (1 + x)^6$ என்க.

$$(1+x)^6 = 1 + {}_6C_1 . x + {}_6C_2 . x^2 + {}_6C_3 . x^3 + {}_6C_4 . x^4 + {}_6C_5 . x^5 + x^6$$

$$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

$$(1+0{\cdot}03)^6 = 1 + 6(0{\cdot}03) + 15(\cdot 0009) + 20(\cdot 000027) + 15(\cdot 00000081) + \ldots$$

$$= 1$$
$$+ 0{\cdot}18$$
$$+ 0{\cdot}0135$$
$$+ 0{\cdot}00054$$
$$+ 0{\cdot}000012 \mid 15 + \ldots$$
$$= 1{\cdot}194052 \mid 15$$
$$= 1{\cdot}19405$$

எடுத்துக்காட்டு 3:

$(2x^3+1)\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$-ல் உள்ள x இல்லாத உறுப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு:

x — இல்லாத உறுப்பு.

$= 2x^3 \left[\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9 \text{ விரிப்பில் } \frac{1}{x^3} \text{ உறுப்பு}\right]$

$+ 1 \left[\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9 \text{ விரிப்பில் நிலையெண் உறுப்பு}\right]$

எனவே, $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$ -ல் $\frac{1}{x^3}$ உறுப்பும், x^0 உறுப்பும் கண்டு பிடித்தால் போதும்.

$$t_{r+1} = {}_9C_r\, (x^2)^{9-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r$$

$$= {}_9C_r\, x^{18-2r}\, (-2)^r/x^r$$

$$= (-2)^r\, {}_9C_r\, x^{18-3r}$$

(i) $18-3r = -3$

$r = 7$

$$\therefore t_{7+1} = (-2)^7\, {}_9C_7\, x^{-3}$$

$$= -2^7 \times \frac{9\times 8}{1\times 2} x^{-3}$$

$$= -2^9 \times 9x^{-3}$$

(ii) $18-3r = 0$

$r = 6$

மாறிலியெண் $t_{6+1} = (-2)^6\, {}_9C_6\, x^0$

$$= 2^6\, {}_9C_3 = 2^6 \times \frac{9\times 8\times 7}{1\times 2\times 3}$$

$$= 2^8 \times 21$$

எனவே, x இல்லாத உறுப்பு

$$= 2x^3\left(-2^9\times 9\times\frac{1}{x^3}\right] + 1\,[2^8\times 21]$$

$$= 2^8\,[-36+21]$$

$$= -2^8\times 15 = -3840$$

எடுத்துக்காட்டு 4:

$(1-ax)^n$ என்பதன் விரிவில், n மிகைமுழு எண்ணாக இருக்கும் போது, முதல் மூன்று உறுப்புகள் $1-4x+7x^2$ எனில், a, n — இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$(1-ax)^n$ -ன் விரிவில்,

$t_1 = 1$

$t_2 = n.\ 1\ (-\ ax) = -\ 4x$

$\Longrightarrow +\ a^n = 4$

$t_3 = \dfrac{n\ (n\ -\ 1)}{1 \cdot 2} \cdot 1 \cdot a^2\ x^2 = 7x^2$

$\Longrightarrow n\ (n\ -\ 1)\ a^2 = 14$

$\Longrightarrow n^2\ a^2\ -\ na^2 = 14$

$\Longrightarrow 16\ -\ 4a = 14$

$\therefore 4a = 2$

$a = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$n = \dfrac{4}{a} = 8$

எடுத்துக்காட்டு 5:

$(1 + x)^n$-ல் மூன்று தொடர் உறுப்புகளின் குணகங்கள் முறையே, $2a$, $15a$, $70a$ எனில் a, n-களைக் காண்க

தீர்வு

t_r, t_{r+1}, t_{r+2} என்ற தொடர் உறுப்புகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

அவற்றின் குணகங்கள் முறையே,

$nc_r = 2a$ (அ-து.) $\dfrac{n!}{(r-1)!\ (n-r+1)!} = 2a$ ... (1)

$nc_r = 15a \longrightarrow$ (அ-து.) $\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!} = 15a$ ... (2)

$nc_{r+1} = 70a \longrightarrow$ (அ-து.) $\dfrac{n!}{(r+1)!\ (n-r-1)!} = 70a$ ... (3)

(2) ÷ (1),

$$\frac{n-r+1}{r} = \frac{15}{2}$$

$$2n - 17r = -2 \qquad \dots (4)$$

(3) ÷ (2), $\frac{n-r}{r+1} = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$

$$3n-17r = 14 \qquad \dots (5)$$

(5) – (4), $n = 16$

(4)-ல் பிரதியிட $32-17r = -2$

$$r = 2$$

பயிற்சி 6–1.

விரித்தெழுதுக :

(1) $(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})^4$ (2) $(2x + y^2)^5$

(3) $(3-2x)^5$ (4) $(2x - \frac{1}{2})^7$

(5) $(3x^2-2y)^7$

(6) ஈருறுப்பு விரிப்பைப் பயன்படுத்தி,

(i) $11^6 = 1771561$ (ii) $9^3 = 970299$

(iii) $(102)^4 = 108243216$ என நிரூபிக்க.

(7) $(1+x)^{10}$-ன் விரிவினை x^4 உறுப்பு வரை எழுதி, $(1.01)^{10}$–ன் மதிப்பை 5 தசமஸ்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

(8) $(1-x)^8$-ன் விரிவினை x^3 உறுப்பு வரை எழுதி $\left(\frac{49}{50}\right)^8$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(9) (i) $(2{\cdot}02)^5$ (ii) $({\cdot}99)^{10}$-களின் மதிப்புகளை 5 தசமத் தானத் திருத்தமாக ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

(10) $(\sqrt{3}+1)^5-(\sqrt{3}-1)^5=152$ எனக்காட்டுக

(11) $(9^{11}+11^9)$ என்பதை 10 வகுக்கும் எனக்காட்டுக.

(12) $(1+x)^n$ விரிப்பில், x^6-ன் குணகம் 593775 எனில், x^{n-6}ன் குணகம் என்ன? (n — ஒரு மிகை முழு எண்.)

(13) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^3+6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2$

$+12\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+8$ எனக் காட்டுக

(14) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{21}$ என்பதன் விரிவின் நடு உறுப்புகள் $21c_{10}x$, $21c_{11}\left(\frac{1}{x}\right)$ எனக் காட்டுக.

(15) (i) $(3a^{\frac{1}{2}}-b)^{11}$ (ii) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n$ ஆகியவற்றின் பொது உறுப்புகளைக் காண்க.

(16) கீழ்க்காணும் விரிவுகளின் நடு உறுப்புகளைக் காண்க:

(i) $(1+x)^{100}$ (ii) $\left(x+\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^8$ (iii) $(x-2y)^{13}$

(iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{11}$ (v) $\left(\frac{y\sqrt{x}}{2}-\frac{a}{x\sqrt{y}}\right)^{12}$

(17) $(1+x)^{2n}$ என்பதன் விரிவின் நடு உறுப்பு

$1.3.5\ \frac{(2n-1)}{\angle n}2^n.x^n$ எனக் காட்டுக.

(18) (a) $\left(2x-\frac{3}{x}\right)^{16}$ என்பதன் விரிவில் 7ஆவது உறுப்பினைக் காண்க.

(b) $\left(\frac{x^3}{2}-\frac{2}{x^2}\right)^9$ என்பதன் விரிவின் 4ஆவது உறுப்பினைக் காண்க.

(19) கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவுகளில் கேடகப்பட்ட உறுப்பின் குணகத்தினைக் காண்க:

(a) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{20}$ x^4-ன் குணகம் — ?

(b) $\left(x + \frac{2}{x^3}\right)^{17}$ x^{11}-ன் குணகம் — ?

(c) $\left(y + \frac{a^3}{y^2}\right)^{10}$ y^{-2}-ன் குணகம் — ?

(d) $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$ x^{32}-ன் குணகம் — ?

(e) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^{20}$ x^{-8}-ன் குணகம் — ?

(f) $(1 + x^4)(1 + x^2)^5$ x^5-ன் குணகம் — ?

(g) $\left(2x - \frac{1}{x^2\sqrt{3}}\right)^{10}$ x^{-2}-ன் குணகம் — ?

(20) $\left(x^2 - \frac{1}{x^3}\right)^{10}$ -ன் விரிவில் x^{12}ஐக் கொண்ட உறுப்பு இல்லையெனக் காட்டுக.

(21) கீழ்க்கண்டவற்றின் விரிவுகளில் x இல்லாத உறுப்புகளைக் காண்க.

(a) $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^{12}$ (b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

(c) $\left(\frac{x^3}{4} - \frac{2}{x}\right)^{10}$ (d) $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x^2}\right)^{10}$

(e) $\left(\frac{4x^3}{3} - \frac{3}{2x^3}\right)^9$ (f) $\left(x^3 + \frac{2}{x^3}\right)^{11}$

(g) $\left(2x^3 + 1\right)\left(x - \frac{2}{x}\right)^9$

(22) $\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^{11}$ என்பதன் விரிவில் x இல்லா உறுப்பு இல்லை எனக் காட்டுக.

(23) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ விரிவில் x இல்லாத உறுப்பு இருக்க வேண்டுமெனில் n, இரண்டின் மடங்காக இருக்கும் என நிரூபிக்க.

(24) n மிகை முழு எண்ணானால், $4^n - 3n - 1$ ஆனது 9 ஆல் வகுபடும் எனக் காட்டுக.

(25) $(1 + x)^{2n}$-ன் விரிவில் x^n-ன் குணகம் $(1 + x)^{2n-1}$-ன் விரிவில் x^n -ன் குணகத்தைப்போல் இருமடங்கு எனக் காட்டுக.

(26) $\left(ax^2 + \frac{1}{6x}\right)^{11}$ -ன் விரிவில் x^7-ன் குணகமும், $\left(ax + \frac{1}{bx^2}\right)^{11}$ -ன் விரிவில் x^{-7}-ன் குணகமும் சமமானால், $ab = 1$ எனக் காட்டுக.

(27) $(1 - x^2)^{10}$ -ன் விரிவில் x^{10} -ன் குணகமும், $\left(x - \frac{2}{x}\right)^{10}$ -ல் x இல்லாத உறுப்பும் 1 : 32 என்ற விகிதத்திலிருக்கும் எனக் காட்டுக.

(28) $(1 + x)^{m+n}$ (m, n மிகை முழு எண்கள்)-ன் விரிவில் x^m, x^n ஆகியவற்றின் குணகங்கள் சமம் என நிரூபிக்க.

(29) $(1 + x)^{20}$ -ன் விரிவில் r ஆவது உறுப்பின் குணகமும், $(r + 4)$ ஆவது உறுப்பின் குணகமும் சமமானால், $r = 9$ எனக் காட்டுக.

(30) $(1 + x)^{44}$ -ன் விரிவில் 21, 22 ஆவது உறுப்புகளின் குணகங்கள் சமமாகும். x-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(31) $(1 + x)^{23}$-ன் விரிவில் r ஆவது உறுப்பின் குணகமும், $(r + 1)$ ஆவது உறுப்பின் குணகமும் 1 : 5 விகிதத்தில் இருப்பின் r-ன் மதிப்பு என்ன?

(32) $(10x+5)^{89}$–ன் விரிவில் சமமான குணகங்களை யுடைய இரு அடுத்தடுத்த உறுப்புகளைக் காண்க.

(33) $(1+ax)^n$-ன் விரிவில் முதல் மூன்று உறுப்புகள் $1+6x+16x^2$ எனில், a, n ஆகியவற்றைக் காண்க.

(34) $(x+a)^n$-ன் விரிவில் 3ஆவது, 4ஆவது, 5ஆவது உறுப்புகள் முறையே 84, 280, 560 எனில், a, x, n ஆகிய வற்றைக் காண்க.

(35) $(x+a)^n$-ன் விரிவில் மூன்று தொடர் உறுப்புகளின் குணகங்கள் 1:2:3 என்ற விகிதத்தில் இருப்பின், n-ன் மதிப்பைக் காண்க.

6-2 ஈருறுப்புக் குணகங்கள்

$(1+x)^n$ (அல்லது) $(x+a)^n$-ன் விரிவில் அடுத்தடுத்து வரும் குணகங்களான nc_0, nc_1, nc_2, ... nc_n ஆகியவற்றை ஈருறுப்புக் குணகங்கள் என்கிறோம்.

இவற்றை c_0, c_1, c_2, ... c_n என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு. $c_0 = nc_0$.

[c_0, c_1, c_2, ... c_n எல்லாம் பாஸ்கலின் முக்கோணத்தில் $(n+1)$ஆவது நிரை என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.]

இக் குணகங்கள் சம்பந்தமான மூன்று பண்புகளைக் காண் போம்.

(1) துவக்கத்திலிருந்தும், இறுதியிலிருந்தும் சமதூரத்தில் உள்ள குணகங்கள் சமம்.

நிரூபணம் :

முதலிலிருந்து $(r+1)$ இடத்தில் அமையும் குணகம் cr.

மொத்தம் உள்ள உறுப்புகள். $(n+1)$ கடைசியிலிருந்து $(r+1)$ இடத்தில் அமையும் குணகத்தினைக் காணவேண்டும்.

இக் குறிப்பிட்ட குணகத்திற்கு முன்னதாக $(n+1)-(r+1) = n-r$ உறுப்புகள் இருப்பதால் துவக்கத்தில் இருந்து இதன் இடம் $(n-r)+1$. எனவே, இதன் மதிப்பு c_{n-r}. ${}_nc_r = {}_nc_{n-r}$. எனவே, $c_r = c_{n-r}$.

(2) $(1+x)^n$-ன் விரிவில் தோன்றும் இருசேர் குணகங்கள் கூடுதற்பயன் 2^n ஆகும்.

நிரூபணம்

$(1+x)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$. விரிவில் $x=1$ எனில்,

$$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n = 2^n.$$

கிளைத் தேற்றம்.

n உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து கிடைக்கும மொத்த உட்கணங்கள் 2^n ஆகும்.

(3) $(1+x)^n$-ன் விரிவில ஒற்றைப்படை இருசேர் குணகங்களின் கூடுதல் பலனும், இரடடைப்படை இருசேர் குணகங்களின் கூடுதல் பலனும் சமம்.

நிரூபணம்

$(1+x)^n = c_0+c_1x+c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ என்பதில் $x = -1$ மதிப்பிட

$$0 = c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + \dots$$

$$\therefore\ c_0 + c_2 + c_4 + \dots = c_1 + c_3 + c_5 + \dots$$

$$= \tfrac{1}{2} \times (\text{எல்லாக் குணகங்களின் கூட்டுத் தொகை})$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$$

$$\therefore\ c_0 + c_2 + c_4 + \dots = c_1 + c_3 + c_5 + \dots = 2^{n-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 1

$3c_1 + 7c_2 + 11c_3 + \dots$ என்ற தொடரின் n உறுப்பு களின் கூடுதல் காண்க.

தீர்வு

$S = 3c_1 + 7c_2 + 11c_3 + \ldots\ n$ உறுப்புகள்.

3, 7, 11, ...என்ற தொடர்முறையின் nஆவது உறுப்பின் குணகம் $4n-1$ ஆகும்.

$$\therefore\quad S = 3c_1 + 7c_2 + \ldots + (4n-1)\,c_n \qquad \ldots (1)$$

c_0 உறுப்பு இதில் இல்லை. c_0 இருப்பின் அதன் குணகம் $(3-4) = -1$. எனவே, $(-1).c_0$ கூட்ட (1) ஆனது

$$S + (-1)\,c_0 = (-1).\,c_0 + 3.\,c_1 + 7c_2 + \ldots + (4n-1)\,c_n \qquad \ldots (2)$$

மேலும்,

$$S + (-1)c_0 = (4n-1)\,c_n + (4n-5)\,c_{n-2} + \ldots + (-1)c_0 \ \ldots (3)$$

$c_r = c_{n-r}$. எனவே, $c_0 = c_n$; $c_1 = c_{n-1}$ ...

$$\begin{aligned}
(2)+(3)\quad 2S + (-1)\,2c_0 &= (4n-2)\,c_0 + (4n-2)\,c_1 + \ldots + (4n-2)\,c_n \\
&= (4n-2)\,(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \\
&= 2^n\,(4n-2) \\
\therefore\ 2S &= 2^n\,(4n-2) + 2\,c_0 \\
S &= 2^n\,(2n-1) + c_0 \\
&= 2^n\,(2n-1) + 1.
\end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$c_1 - 2\,c_2 + 3.c_3 - 4.c_4 + \ldots + n\,(-1)^{n-1}c_n = 0$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$$c_1 - 2.c_2 + 3.c_3 + \ldots + n(-1)^{n-1}c_n$$

$$= n - 2.\,\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} + 3.\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + n\,(-1)^{n-1}$$

$$= n\left[1 - \frac{n-1}{1!} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \dots + (-1)^{n-1}\right]$$

$$= n\left[(1-1)^{n-1}\right] = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = \dfrac{2n!}{(n!)^2}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$(1+x)^n$-ன் விரிவினை இருவழிகளில் எழுதிப் பெருக்க.

$$(1+x)^n (1+x)^n = [c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n]$$
$$[c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0]$$

வலப்புறம் x^n-ன் குணகம்

$$= c_0\,c_0 + c_1\,c_1 + c_2\,c_2 + \dots + c_n\,c_n$$
$$= c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \qquad \dots (1)$$

ஆனால், இடப்புறம் x^n-ன் குணகம் $2_nc_n = \dfrac{2n!}{n!\ n!}$ ... (2)

இவற்றினின்று

$$c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$$

எனக் காண்கிறோம்.

பயிற்சி 6-2.

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(1) $c_0 + 2\cdot c_1 + 3.c_2 + \dots + (n+1)\,c_n = (n+2)2^{n-1}$

(2) $c_0 + 3.c_1 + 5.c_2 + \dots + (2n+1)\,c_n = (n+1)\,2^n$

(3) $2c_0 + 5.c_1 + 8.c_2 + \dots + (3n+2)\,c_n = (3n+4)2^{n-1}$

(4) $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \dots + nc_n = n2^{n-1}$

(5) $c_0 + \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{3} c_2 + \dots + (-1) \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

(6) $c_0 c_r + c_1 c_{r+1} + \dots + c_{n-r} c_r$

$$= \frac{2n!}{(n-r)!\,(n+r)!}$$

6.3. விகிதமுறு எண் படிகட்கு ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றம்

படி முழு எண்ணுக உள்ளபோது ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தினை நிறுவினேம். படி குறையெண்ணுகவும் விகிதமுறு எண்ணுகவும் உள்ளபோதும், சில நிபந்தனைகட்குட்பட்டு ஈருறுப்புச் சேர்க்கைத் தேற்றத்தை நிறுவலாம். இவற்றின் நிரூபணம் தற்பொழுது கொடுக்கப்படவில்லை.

$n \in Q$, $|x| < 1$ ஆனல்,

$$(1+x)^n = (1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{\underline{|r}} x^r + $$

ஆகும்.

[குறிப்பு:

(1) மேற்கூறிய முடிவு $|x| < 1$ ஆக இருக்கும்போதே n-ன் எல்லாத் தகவுறு மதிப்புகளுக்கும், உண்மையாக இருக்கும் என்பதை வலியுறுத்துகிறேம்.

(2) n-மிகை முழு எண் எனில் x^r-ன் குணகம் $_nc_r$ ஆகும். தொடர் $(n+1)$ உறுப்புகளோடு முடிவுறும் n குறை எண் ஆகவோ, பின்னமாகவோ இருக்கும்போது தொடர் முடிவுருது.

(3) தொடரின் பொது உறுப்பானது

$$t_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} x^r.$$

(4) x மிகச் சிறியதாக இருக்கும்போது,

$$(1+x)^n \simeq 1+nx.$$

முக்கிய விரிவுகள் : ($|x| < 1$ உள்ளபொழுது)

(i) $$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$= 1 + (-1)(x) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2 + \ldots$$

$$= 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^r x^r + \ldots$$

(ii) $$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

$$= 1+x+x^2+x^3 + \ldots + x^r + \ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 1

$\left|\frac{x}{a}\right| < 1,\ x \in Q$ ஆனால் $(a+x)^n$ -ன் விரிவினை எழுதுக.

தீர்வு

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$= a^n\left[1 + n\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \ldots\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 2

x-ன் இரண்டும், இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட படிகளின் மதிப்புகள் பொருட்படுத்தாத அளவு மிகச் சிறிய எண்ணெனில்

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}\,(1+x)^{\frac{1}{4}}}{(1-x)^{\frac{1}{3}}} \simeq 1 + \frac{11x}{12}$$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$(1+x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{\frac{1}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= (1 + \tfrac{1}{3}x + \ldots)(1 + \tfrac{1}{4}x + \ldots)(1 + \tfrac{1}{3}x + \ldots)$$

$$= 1 + (\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3})\,x + \cdots$$

$$\simeq 1 + \frac{11x}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{8\cdot16}}$-ன் மதிப்பை 4 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

தீர்வு

$$\frac{1}{\sqrt[3]{8\cdot16}} = (8+\cdot16)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \{8[1+\cdot02]\}^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[1+\cdot02]^{-\frac{1}{3}}$$

$$\left[\because\ 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \tfrac{1}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1+(-\tfrac{1}{3})(\cdot02) + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{2!}(\cdot02)^2 + \ldots\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1-\frac{\cdot02}{3} + \frac{\cdot0008}{9} + \ldots\right]$$

$$= \cdot5 - \cdot00333 + \cdot00004$$

$$= \cdot4966$$

பயிற்சி 6·3.

(1) $|x| < 1$ எனில் முதல் 3 உறுப்புகளை விரித்து எழுதுக.

(a) $(1+x)^{-2}$ (b) $(1-x)^{-2}$

(c) $(1+x)^{-\frac{1}{3}}$ (d) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$

(2) $\sqrt[3]{128}$-ன் மதிப்பை 3 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

(3) $\sqrt{26}$-ன் மதிப்பை 6 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க.

(4) பின்வருவனவற்றின் மதிப்புகளை 3 தசமத்தானத் திருத்தமாகக் காண்க :

(a) $\sqrt[3]{998}$ (b) $\sqrt[3]{1003}$ (c) $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{4}{5}}$

(d) $\sqrt[2]{1{\cdot}01} - \sqrt[2]{\cdot 99}$, (e) $\sqrt[3]{1003} - \sqrt[3]{997}$

(5) x மிகச் சிறியதெனில் $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \simeq 1 - x + \dfrac{x^2}{2}$

எனக் காட்டுக.

7. கணித வித்தியாசங்கள்

7.1. முன்னுரை

$3+8+15+24+\ldots$ என்ற தொடரின் கூடுதல் காண வேண்டும் என்போம். இதுவரை மூன்றுவகைத் தொடர்களைப், பற்றி — A.P., G.P., H.P. — விவரமாகப் படித்துள்ளோம். தற்பொழுதைய தொடர் அவற்றில் ஏதேனும் ஒன்று, அல்லது சில மாறுபாடுகளோடு, அத்தொடர்களோடு சம்பந்தப்படுத்த இயலுமா என்று அறிய முடிந்தால், இத்தொடரின் கூடுதலைக் காணப் பெரிதும் உதவியாக இருக்கும். மேலெழுந்த வாரியாக ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்புமுறை காணப்படாவிட்டாலும், சிறிது தீவிரமாக இத்தொடரை அலசினால், இது ஒரு குறிப்பிட்ட விதிக்குட்பட்டே உருவாகியுள்ளது எனக் காணலாம்.

அடுத்தடுத்த உறுப்புகளின் வித்தியாசங்கள் 5, 7, 9 என்பவை ஒரு A. P.-ல் அமைந்துள்ளன. இதனைப் பயன் படுத்தி, கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் கண்டுபிடிக்க முற்படுவோம்.

பொதுவாக, ஒரு தொடர் கொடுக்கப்பட்டால் முதலில் வித்தியாசங்கள் காணவேண்டும். தேவைப்பட்டால் வித்தியாசங்களுக்கு வித்தியாசங்களும், அவற்றிற்கு மீண்டும் வித்தியாசங்களும், ஆக இவ்வாறே தேவையான அளவு வித்தியாசங்களைக் கண்டுபிடித்து, அவ்வித்தியாசங்களிலாவது ஏதாவது குறிப்பிடத்தக்க அமைப்பு உள்ளதா எனப் பார்க்கவேண்டும். இவ்வமைப்பு கூடுதல் கண்டுபிடிக்க உதவும்.

இவ்வழியில், தொடர்களின் கூடுதலை வித்தியாசங்கள் வழி ஏற்படும் தன்மைகளைக் கொண்டு காணமுடிகிறது எனில், தொடர்களின் நடுவே விட்டுப்போன சில உறுப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கவும், தொடர்களின் தேவையான உறுப்புகளைக் கண்டு பிடிக்கவும் பயன்படுத்துகிறோம்.

7.2. △ இயக்கி

$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$ என்ற தொடர் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3,\ u_5-u_4,\ \ldots,\ u_n-u_{n-1},\ u_{n+1}-u_n,\ \ldots$ இவை முதல் வித்தியாசங்களெனப்படும்.

Δ என்ற இயக்கியினை $\Delta\, u_n = u_{n+1} - u_n$ என்றவாறு வரையறை செய்யலாம்.

எனவே, $\Delta\, u_1 = u_2 - u_1$

$\Delta\, u_2 = u_3 - u_2$

$\Delta\, u_3 = u_4 - u_3$

$\Delta u_2 - \Delta u_1,\ \Delta u_3 - \Delta u_2,$ எனபவை இரண்டாம் வித்தியாசங்களெனபபடும்; அல்லது $\Delta^2 u_1,\ \Delta^2 u_2,\ \ldots,\ \Delta^2 u_n$ என்று குறிககபபடும் Δ^2 இரண்டாம் வித்தியாசங்களின் இயக்கியாகும்.

$$\Delta^2 u_n = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n$$

இதுபோலவே, $\Delta^3 u_n = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n$ என்பது மூன்றும் வித்தியாசங்களைக் குறிக்கும். இவ்வாறே மேல் வித்தியாசங்களையும் கண்டு கொண்டே செல்லலாம்.

$\Delta,\ \Delta^2,\ \Delta^3,$ இவை எண்கள் அல்ல என்றும், $\log,\ \dfrac{d}{dx},\ \int$ என்பவற்றைப் போன்ற ஓர் இயக்கி எனவும் அறிதல் வேண்டும்.

கீழ்க்கண்ட அட்டவணை இவ் வித்தியாசங்களை விளக்கும்:

u	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
u_1						
	Δu_1					
u_2		$\Delta^2 u_1$				
	Δu_2		$\Delta^3 u_1$			
u_3		$\Delta^2 u_2$		$\Delta^4 u_1$		
	Δu_3		$\Delta^3 u_2$		$\Delta^5 u_1$	
u_4		$\Delta^2 u_3$		$\Delta^4 u_2$		$\Delta^6 u_1$
	Δu_4		$\Delta^3 u_3$		$\Delta^5 u_2$	
u_5		$\Delta^2 u_4$		$\Delta^4 u_3$		
	Δu_5		$\Delta^3 u_4$			
u_6		$\Delta^2 u_5$				
	Δu_6					
u_7						

எடுத்துக்காட்டு

4, 14, 30, 52, 80, ... என்ற தொடர் வரிசைக்கு

(i) Δ^3 (4)ஐக் கண்டுபிடிக்க.

(ii) 6ஆவது உறுப்பைக் கண்டுபிடிக்க.

தீர்வு

முதல் வரிசை வித்தியாசங்கள் :

$\Delta (4) = 14 - 4 = 10$

$\Delta (14) = 30 - 14 = 16$

$\Delta (30) = 52 - 30 = 22$

$\Delta (52) = 80 - 52 = 28$

இரண்டாம் வரிசை வித்தியாசங்கள்:

$\Delta^2 (4) = 16 - 10 = 6$

$\Delta^2 (14) = 22 - 16 = 6$

$\therefore \Delta^3 (4) = \Delta^2 (14) - \Delta^2(4) = 6 - 6 = 0.$

வித்தியாசங்களின் அட்டவணை:

r	u_r	Δ	Δ^2	Δ^3
1	4			
		10		
2	14		6	
		16		0
3	30		6	
		22		0
4	52		6	
		28		$k-114$
5	80		$k-108$	
		$k-80$		
6	k			

மூன்றாம் வித்தியாசங்கள் 0 எனக் காண்கிறோம்.

$$\Delta^3 u_3 = 0$$

$$k - 114 = 0 \quad (\text{அதாவது})\ k = 114$$

$\therefore$ ஆறாவது உறுப்பு $= 114$

7.3. மாற்றும் இயக்கி E

E என்ற வேறோர் இயக்கியினை, $Eu_n = u_{n+1}$ என்றவாறு வரையறை செய்வோம். E என்பதை மாற்றும் இயக்கி என்கிறோம்.

அதாவது: $Eu_1 = u_2$

$Eu_2 = u_3$

மேலும், $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$

$= Eu_n - u_n$

அல்லது $Eu_n = u_n + \Delta u_n$

u_n என்பது ஏதோவோர் எண். எனவே, $E \equiv 1 + \Delta$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கிறது; அல்லது $\Delta \equiv E - 1$. இங்கு

E^2 இயக்கியினை $E^2(u_n) = E\ (Eu_n) = E\ (u_{n+1}) = u_{n+2}$ என்று வரையறை செய்கிறோம்.

இதேபோன்று E^3, E^4, ... போன்ற இயக்கிகளையும், வரையறை செய்யலாம்.

பொதுவாக, $E^k(u_n) = u_{n+k}$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$u_0 = 3,\ u_1 = 12,\ u_2 = 81,\ u_3 = 200,\ u_4 = 100,\ u_5 = 8$ எனில், $\Delta^5 u_0$ எவ்வளவு ?

தீர்வு

$$
\begin{aligned}
\Delta^5 u_0 &= (E-1)^5 u_0 \\
&= (E^5 - 5E^4 + 10E^3 - 10E^2 + 5E - 1)\ u_0 \\
&= E^5 u_0 - 5E^4 u_0 + 10E^3 u_0 - 10E^2 u_0 + 5Eu_0 - u_0 \\
&= u_5 - 5u_4 + 10u_3 - 10u_2 + 5u_1 - u_0 \\
&= 8 - 5\ (100) + 10\ (200) - 10(81) + 5(12) - 3 \\
&= 755
\end{aligned}
$$

7.4. நியூட்டன் - கிரிகரி வாய்பாடு

$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ கொடுக்கப்பட்டால்,

$u_n = u_0 + {}_nc_1\ \Delta u_0 + {}_nc_2\ \Delta^2 u_0 + {}_nc_3\ \Delta^3 u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$.

இவ் வாய்பாட்டை n-ன் ஒரு மதிப்பிற்குச் சரிபார்ப்போம்.

$$
\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + (u_n - u_{n-1}) \\
&= u_{n-1} + \Delta u_{n-1} \\
&= (1+\Delta)\ u_{n-1} \\
&= (1+\Delta)\ (1+\Delta)\ u_{n-2} \\
&= (1+\Delta)\ (1+\Delta)\ (1+\Delta)\ u_{n-3} \\
&= (1+\Delta)^3\ u_{n-3} \\
&= (1+\Delta)^4\ u_{n-4}
\end{aligned}
$$

....

$= (1+\Delta)^n u_0$

$= u_0 + {}_nc_1 \Delta u_0 + {}_nc_2 \Delta^2 u_0 + \dots + {}_nc_r \Delta^r u_0 + \dots$
$+ \Delta^n u_0$

கணிதத்தொகுத்தறி முறையைப் பயன்படுத்தி எல்லா $n \in N$ களுக்கும் இது மெய் என நிறுவலாம்.

[குறிப்பு :

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ என்ற தொடருக்கான வாய்பாடு
$u_n = u_1 + {}_{(n-1)}c_1 \Delta u_1 + {}_{(n-1)}c_2 \Delta u_1 + \dots$
$+ {}_{(n-1)}c_r \Delta^r u_1 + \dots + \Delta^{n-1} u_1$]

எடுத்துக்காட்டு

$f(0) = -3$; $f(1) = 6$, $f(2) = 8$, $f(3) = 12$ எனில், $f(6) = ?$ மூன்றும் வித்தியாசங்கள் யாவும் சமமான நிலையெண்கள்.

தீர்வு

வித்தியாச அட்டவணையை ஏற்படுத்த:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	−3			
		9		
1	6		−7	
		2		
2	8			9
		4	2	
3	12			

நியூட்டன் கிரிகரி வாய்பாட்டின்படி

$f(6) = E^6 f(0) = (1+\Delta)^6 f(0)$

$f(6) = f(0) + 6c_1 \Delta f(0) + 6c_2 \Delta^2 f(0) +$
$6c_3 \Delta^3 f(0) + \dots\dots (\because \Delta^4 f(0) = 0)$
$= -3 + 6 \times 9 + 15(-7) + 20(9)$
$= 126$

எடுத்துக்காட்டு 1

$u_x = 3x^2 + 4x + 5$ எனில், $\Delta^2 u_x$ ஒரு நிலையானது என்றும், $\Delta^3 u_x$ பூச்சியம் என்றும் நிரூபிக்க.

தீர்வு

$$\Delta u_x = u_{x+1} - u_x$$
$$= 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 5 - 3x^2 - 4x - 5$$
$$= 6x + 7$$
$$\Delta^2 u_x = \Delta(\Delta u_x)$$
$$= [6(x+1) + 7] - (6x + 7)$$
$$= 6$$
$$\Delta^3 u_x = \Delta(\Delta^2 u_x)$$
$$= 6 - 6 = 0$$

கவனிக்க

(i) u_x ஒரு n படி கோவையெனில், $\Delta^n u_x$ நிலையெண்ணாகும். $\Delta^{n+1} u_x$ பூச்சியமாகும்.

இதன் மறுதலையும் மெய்யே. அதாவது $\Delta^4 u_x$ ஒரு நிலையெண் எனில் u_x ஆனது 4 படி உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + ... தொடருக்கான வித்தியாச அட்டவணையைத் தயார் செய்க.

தீர்வு

x	u_x	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
1	2						
		2					
2	4		2				
		4		2			
3	8		4		2		
		8		4		2	
4	16		8		4		2
		16		8		4	
5	32		16		8		
		32		16			
6	64		32				
		64					
7	128						

கருத்து

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் ஒரு G.P. எனில், ஒவ்வொரு வித்தியாசமும் G. P.-யே ஆகும். இதன் மறுதலை மெய்யா எனக் காண்க.

7.5. அமைப்பு தெரியாத் தொடர்

ஒரு தொடரின் அமைப்பு தெரியவில்லை என்க. முதல் ஒரு சில உறுப்புகளே கொடுக்கப்படுகின்றன என்க. வித்தியாசங்களைக் காண $\Delta^n u_x = 0$ எனில் தொடரின் அமைப்பினை $(n-1)$ படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின்மூலம் காணலாம் என்க. எடுத்துக்காட்டாக $\Delta^4 u_x = 0$ எனில், n ஆவது உறுப்பு படி 3 உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக, மேலும் நான்காவது வித்தியாசங்கள் G.P.-ல் இருப்பின், nஆவது உறுப்பு இரு உறுப்புகளின்

சேர்க்கையாகும். அதாவது, ஒரு G.P.-யும், 3 படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையும் சேர்ந்ததாக இருக்கும். kஆவது வித்தியாசங்கள் G.P.-ல் இருந்தால்,

$$u_n = \text{G.P.} + \text{ஒரு } (k-1) \text{ படியுள்ள பல்லுறுப்புக்கோவை.}$$

மேலும் வித்தியாசங்கள் r என்ற பொதுவிகிதமுள்ள G.P.-ல் இருந்தால், u_n-ல் வரும் G.P.-யும் rஐயே பொதுவிகிதமாகக் கொண்டிருக்கும். இதனைக் கீழ்க் கண்ட எடுத்துக்காட்டு மூலம் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$8 + 26 + 54 + 92 + 140 + \ldots$ என்ற தொடரின் n ஆவது உறுப்பையும், n உறுப்புகளின் கூடுதற்பலனையும் காண்க.

தீர்வு

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$
1	8			
		18		
2	26		10	
		28		0
3	54		10	
		38		0
4	92		10	
		48		
5	140			

$\Delta^3 u_x = 0$. எனவே, u_x 3ஆவது படியில் உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவை எனலாம்.

$$\therefore u_n = u_1 + {}_{n-1}c_1 \, \Delta u_1 + {}_{n-1}c_2 \, \Delta^2 u_1 + \ldots$$

$$= 8 + 18n - 18 + 5n^2 - 15n + 10$$

$$= 5n^2 + 3n$$

$$S_n = 5\,\Sigma n^2 + 3\,\Sigma n$$

$$= \frac{5}{6} n\,(n + 1)\,(2n + 1) + \frac{3}{2} n\,(n + 1)$$

$$= \frac{n(n + 1)\,(5n + 7)}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

3 + 5 + 9 + 17 + 33 + ... என்ற தொடரின் n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன் காண்க.

தீர்வு :

x	u_x	Δu_x	$\Delta^2 u_x$	$\Delta^3 u_x$	$\Delta^4 u_x$
1	3				
		2			
2	5		2		
		4		2	
3	9		4		2
		8		4	
4	17		8		
		16			
5	33				

இங்கு, முதல் வித்தியாசத்தில் முதல் 4 உறுபபுகளும், $a = 2$, $r = 2$ உள்ள ஒரு G. P.யில் உள்ளதெனக் காண்கிறோம். எனவே, nஆவது உறுப்பு u_n ஒரு G. P.-யுடன் $(1 - 1) = 0$ படியுள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக்கோவையும் சேரக் கிடைக்கும் கோவையின்மூலம் கூறலாம்.

$$u_n = u_n' + u_n''$$

u_n' ஆனது $r = 2$, $a = 3$ என்ற G. P. என்றும், u_n'' 0-படியுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை யென்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore u_n = A2^{n-1} + B$ என்று எழுதுவோம்.

$n = 1$ எனில் $u_1 = A + B$

$n = 2$ எனில் $u_2 = 2A + B$

$$\therefore A + B = 3$$

$$2A + B = 5$$

$$\therefore A = 2, B = 1$$

$$\therefore u_n = 2.2^{n-1} + 1$$

$n = 1.\quad u_1 = 2.2^0 + 1$

$n = 2.\quad u_2 = 2.2^1 + 1$

$n = 3.\quad u_3 = 2.2^2 + 1$

$n = 4.\quad u_4 = 2.2^3 + 1$

....

$$u_n = 2.2^n + 1$$

$$\therefore S_n = 2\,\frac{2^n - 1}{2 - 1} + n = 2^{n+1} - 2 + n$$

எடுத்துக்காட்டு

பல்வேறு மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்புகளில் ஒரு நகரத்தின் மககள்தொகை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டு :	1881	1891	1901	1911	1921
தொகை:	75401	82984	86686	—	93091

இதில் 1911ஆம் ஆண்டுக்கான மக்கள்தொகை என்ன எனக் காண்க.

தீர்வு

பத்து ஆண்டுகள் இடைவெளியை ஓர் அலகு எண்ணாக எடுத்துக்கொண்டால், அவற்றை u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 என்று எடுத்துக்கொள்வோம். u_3 காணப்படவேண்டியது. 4 மதிப்புகளே தெரிந்தவைகளாக இருப்பதால் 3ஆவது வித்தியாசங்கள் நிலையெண்கள் என எடுத்துக்கொள்வோம். எனவே, 4ஆவது வித்தியாசங்கள் பூச்சியங்கள் ஆகும்.

$$\therefore \Delta^4 u_0 = 0$$

(அதாவது) $(E-1)^4 u_0 = 0$

(அ-து.) $(E^4 - 4E^3 + 6E^2 - 4E + 1) u_0 = 0$

(அ-து.) $E^4 u_0 - 4E^3 u_0 + 6E^2 u_0 - 4E u_0 + u_0 = 0$

(அ-து.) $u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0 = 0$

(அ-து.) $93091 - 4u_3 + 6\,(86686) - 4\,(82984) + 75401 = 0$

$$\therefore \; u_3 = 89168$$

பயிற்சி 7-1.

(1) கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக.

(a) $\Delta\,(u_n + V_n) = \Delta u_n + \Delta\, V_n$

(b) $\Delta^2\,(u_n) = u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n$

(c) $E\,(u_n + V_n) = E\,u_n + EV_n$

(d) $\Delta\,(Cu_n) = C(\Delta u_n)$

(e) $\Delta^m \Delta^n u_k = \Delta^n \Delta^m u_k = D^{m+n} u_k$

(2) $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, $u_2 = 27$, $u_3 = 49$, $u_4 = 32$, $u_5 = 0$ எனில் $\Delta^5 u_0$ஐக் காண்க.

(3)

x	10	11	12	13
$f(x)$	1·0233	1·1342	1·3241	1·5319

மேற்கண்ட அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி $f(10)$-ன் மூன்றும் வித்தியாசங்களைக் காண்க.

(4)

x	45	50	55	60	65
$f(x)$	2·871	2·404	2·404	1·862	1·712

மேற்கண்ட விவரங்கட்கு வித்தியாசங்களின் அட்டவணை தயார்செய்து $\Delta^4 f(x)$ கண்டுபிடிக்க.

(5) $y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ எனில், $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கான, y-ன் மதிப்புகளைக் காண்க. பின்பு, வித்தியாச அட்டவணையைத் தயார்செய்க. பின்பு,

$$\Delta^2 y = 12x + 10, \quad \Delta^5 y = 0$$

என்பதைச் சரிபார்க்க.

(6) வித்தியாச அட்டவணையைத் தயார்செய்து,

$8+12+19+29+42+\ldots$ என்ற தொடரின் 6ஆவது உறுப்பினைக் காண்க.

(7) $f(0)=-3, f(1)=6, f(2)=8, f(3)=12$ மூன்றும் வித்தியாசங்கள் யாவும் சமம் என்றால், $f(6)$ஐக் காண்க.

(8) படி 3 உள்ள ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் 3ஆவது வித்தியாசங்கள் யாவும் சமம் எனக் காட்டுக.

(9) nஆவது உறுப்புகளைக் காண்க.

(a) $2+12+36+80+150+252+\ldots\ldots$

(b) $3+8+15+24+35+\ldots\ldots$

(c) $4+11+20+31+44+\ldots\ldots$

(10) n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன்களைக் காண்க.

(a) $4+14+30+52+80+114+\ldots\ldots$

(b) $6+3+2+3+6+11+\ldots\ldots$

(c) $7+14+19+22+23+22+\ldots\ldots$

(11) n உறுப்புகளின் கூடுதல் பலன்களைக் காண்க.

(a) $8+16+36+92+256+\ldots$

(b) $9+22+59+168+493+\ldots$

(c) $6+9+14+23+40+\ldots$

(12) கீழ்க்கண்ட அட்டவணையிலிருந்து, 1935ஆம் ஆண்டின் பருத்தியின் மொத்த விளைச்சலைக் காண்க:

ஆண்டு :	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
மொத்த விளைச்சல் :	17·1	13·0	14·0	9·6	—	12·4	18·2

பகுதி A

விடைகள்

பயிற்சி 1-1.

(1) (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (2) 14, 52, 195 (3) 0

(4) (i) $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$ (ii) $\frac{-b\sqrt{b^2-4ac}}{a^2}$

(iii) $\frac{(b^2-2ac)^2-2a^2c^2}{a^4}$ (iv) $\frac{-b^3+3abc}{a^3}$

(v) $\frac{b^2-2ac}{ac}$ (vi) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$ (vii) 0 (5) 0

(7) $\frac{(b^2-ac)(b^2-3ac)}{a^4}$ (8) $2x^2+3x-45=0$

(9) $4x^2-x+22=0$ (10) $4x^2+3x+2=0$

(11) (i) $acx^2+(2ac-b^2)x+ac=0$

(ii) $cax^2+b(c+a)x+(c+a)^2=0$

(iii) $bcx^2+(b^2+ac)x+ab=0$

(iv) $c^2x^2+(2ac-b^2)x+a^2=0$

(v) $a^3x^2-ab^2x+b^2c=0$

(vi) $a^4x^2-2a^2(b^2-2ac)x+b^2(b^2-4ac)=0$

(12) $-4, -3$.

பயிற்சி 1-2.

(1) (i) $2b^2=9ac$ (ii) $3b^2=16ac$

(iii) $nb^2=ac(n+1)$ (iv) $b^2=4ac$

(v) $b^3 + ac^2 + a^2c = 3\,abc$ (vi) $c = a$

(vii) a, c ஒரே குறி, b எதிர்க்குறி (viii) $c = 0$

(7) 3, 24 (8) −7, −37

(10) (a) மெய்யன்று (b) மெய், சமமன்று

(c) மெய், சமம் (d) மெய், விகிதமுறு எண்

(e) மெய்

(12) மெய், விகிதமுறு எண் (14) 2, $-\frac{10}{9}$

(15) $\frac{1}{3}$ (17) $\frac{-3}{2}$, 4 (23) 0, 5

பயிற்சி 1-3.

(1) $\{x \leq -6\} \cup \{x \geq 3\}$ (2) $\left\{x / -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{5}\right\}$

(3) $\{x / -3 < x < 3\}$ (4) $\{1\}$ (5) ϕ

(6) யாவும் மெய் x கள் (7) $\{x < 1\} \cup \{x > 6\}$

(8) $\left\{\frac{x}{x} < -\frac{1}{2}\right.$ (அ) $\left. x > 4\right\}$

(12) (a) $1 < x < 4$

(b) (1, 4) இடையே x அமைதல் கூடாது.

(15) 1, 0.

பயிற்சி 1-4.

(1) (a) 5 (b) 1 (c) 7 (d) 3 (e) 3

(3) (a) 3 (b) 5 (4) (a) $-2 \pm 2\sqrt{2}$, −5, −1

(b) 3, −4, $\frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2}$

(5) (a) $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$ (b) $-2, -\frac{3}{2}$ (c) $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

(d) $-2 \pm \sqrt{2}$, $-2 \pm \sqrt{5}$

(6) (a) (5, 7) (7, 5) (b) $(1, -2)\left(-\frac{5}{2}, \frac{17}{2}\right)$

(c) (3, 4) (4, 3) (d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

பயிற்சி 2-1.

(1) (i) $\log_3 9 = 2$ (ii) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

(iii) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ (iv) $\log_5 1 = 0$

(v) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = -3$

(2) (i) $\log_p r = q$ (ii) $\log_3 9^2 = 4$ (iii) $\log_9 3^4 = 2$

(3) (i) 81 (ii) 4 (iii) 2 (iv) $\frac{1}{16}$ (v) 0

(vi) 213 (4) (a) 6 (b) 5 (c) −2

(5) (i) 0 (ii) −2 (iii) 1 (iv) 2 (v) $\frac{1}{2}$ (vi) $\frac{1}{4}$

(6) (i) 2 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) MN/p^2

(9) $n/(1-n)$ (17) (i) 2·6353 (ii) 3.8090

(27) 2^{1000} (28) (a) $\frac{10}{2}$ (b) 1

(c) $\frac{5 \log 2 - 2 \log 3}{2 \log 2 - \log 3 - 2 \log 7}$

பயிற்சி 2-2.

(1) (i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\bar{1}$ (v) $\bar{3}$ (vi) $\bar{4}$

(2) (i) 5217 (ii) ·1199 (iii) ·4856

(3) (i) 2·0934 (ii) $\bar{1}$·4166 (iii) $\bar{2}$.7497

(iv) 20899

(4) (i) 136 (ii) ·0376 (iii) 3·31 (5) 38

(6) (i) 4·5 (ii) $\bar{3}$·5 (iii) $\bar{1}$·6 (iv) 1·6 (v) $\bar{2}$·5

(vi) $\bar{2}$·13 (vii) 2·83 (8) 55·7

பயிற்சி 3-1.

(1) 6 (2) 6 (3) 1,320 (4) 12 (5) 4

(6) 8.2^4 (7) 25, 20 (8) 120, 3125 (9) 23400

பயிற்சி 3-2.

(1) (i) 10 (ii) 10 (iii) 5 (2) 336 (3) 9! (4) 90
(5) 375 (6) 120, 24 (7) 120·6666600
(8) $6! \times {}_7p_4$ (9) 720 (10) 480 (11) 3!7!5!3!
(12) 1440 (13) 16 (14) 164 (16) (a) 24 (b) 24
(17) 28, 800, 2880

பயிற்சி 3-3.

(1) ${}_8c_5$, ${}_8p_5$ (2) $\left(\frac{12}{3}\right)$ (3) 12 (5) 3 (6) 25 (7) 1
(9) 35 (10) 280 (11) 210, 105 (12) (i) ${}_{11}C_3$
(ii) ${}_{10}C_3$ (iii) ${}_{10}C_4$ (13) 780 (14) (i) 120 (ii) 100
(15) (i) 480 (ii) 10 (iii) 4 (16) 210 (18) 35.

பயிற்சி 3-4.

(2) 7ஆவது நிரை: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
8ஆவது நிரை. 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
9ஆவது நிரை: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

முநதைய நிரைகளுக்குப் புத்தகத்தைப் பார்க்கவும்.

(3) ${}_nCr = {}_nC_{n-r}$

(4) $1+6+15+20+15+6+1 = 64$

(5) $x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$
$x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$

(6) (a) உண்மை (b) (c) பொய்

(7) (a) $x=3$ (b) $x=5$ (c) $x=6$ (d) $x=5$

பயிற்சி 4-1.

(11) $\frac{n(n-1)}{2}$

பயிற்சி 5-1.

(2) 26, 31. (3) $\frac{1}{16}$ (4) (a) — 1 (b) 54
(c) 32 (d) 20 (e) 22 (f) 20 (g) 63 (h) 23

பயிற்சி 5-2.

(1) (a) 9 (b) 4 (c) 14 (d) 11

(2) (a) 106 (b) —32 (c) 13 (d) — 58
(e) $7n - 4$ (f) $(n+4)$ $(n+2)$

(3) $6n - 1$, (4) (a) 40 (b) 33

(5) (a) 13 (b) 13 (8) 4, 9, 14 (9) 3, 7, 11

(10) 31 (11) இல்லை (12) 36 (13) 5, 13

(14) $-2, -6$ (15) (i) $p + q - r$
(ii) $p + q - pq$ (iii) 0

பயிற்சி 5-3.

(2) 1500, 1 — 1 — 1999 (3) 14,1600

(4) (i) 1449 (ii) 2072 (iii) $10\frac{(n+1)}{a}$ (iv) $\frac{n-1}{2}$

(v) 50 (vi) $\frac{n}{2}(5n+7)$ (vii) 440 (viii) 520

(5) (i) 16 (ii) 21 (6) (i) 8729 (ii) 50971

(7) 53 (8) $-\frac{5}{2}$, 75 (9) 18 அல்லது 19,
$t_{19} = 0$ (10) 62525

பயிற்சி 5-4.

(1) (a) -108 (b) $\frac{7}{4}$ (c) 3 (d) $\frac{6}{5}$

(2) (a) 2^{16} (b) $\frac{7}{32}$ (c) -4×3^5

(3) 2 ச.செ.மீ. (4) 67 (5) 46,305 (6) 4, 6, 9
அல்லது 9, 6, 4 (7) 1, 2, 4 அல்லது 4, 2, 1

(8) (a) t_9 (b) t_{12} (9) $4 + 8 + 16 + \ldots$

(10) (a) $16\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (b) $\frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}$ (14) 8, -4, 2, 8

(15) 2, 5, 8 (16) $\pm\frac{2}{3}$ (17) $\frac{39}{16}$, $\frac{3}{16}$

(18) (a) $1 - \frac{1}{2^n}$ (b) $-\frac{49}{81}(10^{n-1}) - \frac{4n}{9}$

(c) $\frac{5n}{9} - \frac{5}{81}\left(1 - \frac{1}{10n}\right)$ (d) $\frac{n(1-x) - x(1-x)}{(1-x)^2}$

(e) $2(2^n - 1) - n$ (19) $\frac{419}{990}$ (20) 5

(21) 8 (23) (i) $\frac{250}{9}$ (ii) $2 + \sqrt{2}$ (iii) 28

(24) $10 + 8 + \frac{32}{5} + \ldots$

பயிற்சி 5-5

(2) (a) $\frac{1}{7}$ (b) 4·2 (3) (a) $\frac{3}{8+n}$ (b) $\frac{14}{n+16}$

(5) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ அல்லது $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$

பயிற்சி 5-6.

(6) 1, 9 (7) (i) 0 (ii) -1 (8) $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$

பயிற்சி 5-7.

(1) (a) $\frac{9}{7}$ (b) $\frac{1}{(1-b^n)(1-n)}$

(2) (a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (b) $\frac{n(4n^2-1)}{3}$

(c) $\frac{n}{2}(4n^2 + 17n + 21)$

(d) $\frac{n(n+1)(3n^2 + 23n + 46)}{12}$

பயிற்சி 6-1.

(1) $x^4 y^2 + 4x^{\frac{7}{2}} y^{\frac{5}{2}} + 6x^3 y^3 + 4x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{7}{2}} + x^2 y^4$

(2) $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$

(3) $243 - 810x + 1080x^2 - 720x^3 + 240x^4 - 32x^5$

(4) $128x^7 - 264x^6 + 168x^5 - 70x^4$

$$+ \frac{35}{2}x^3 - \frac{21}{8}x^2 + \frac{7}{12}x - \frac{1}{12}$$

(5) $2187x^{14} - 10206x^{12}y + 20412x^{10}y^2 - 22680x^8y^3$
$+ 15120x^6y^4 - 6048x^4y^5 + 1344x^2y^6 - 128y^7$

(7) 1·10462 (8) 0·90438 (12) 593775

(15) (i) $\binom{11}{r}\left(3a^{\frac{1}{2}}\right)^{n-r}(-b)^r$ (ii) $\binom{n}{r}\left(\frac{9}{b}\right)^{n-2r}$

(16) (i) $\frac{100}{50}$ (ii) $\frac{35}{8}x^4y^2$

(iii) $\binom{13}{6}64x^7y^6, -\binom{13}{7}128x^6y^7$

(iv) $-\binom{11}{5}2^5x, \binom{11}{6}\frac{2^6}{x}$ (v) $\binom{12}{6}\frac{y^3}{x^3}$

(18) (i) $\binom{16}{6}2^{10}3^6x^4$ (ii) $\binom{9}{6}\frac{8}{x^3}$

(19) (a) $\binom{20}{8}$ (b) 544 (c) $\binom{10}{5}a^{15}$

(d) $\binom{15}{4}$ (e) $\binom{20}{4}2^{14}$ (f) 60 (g) $\frac{4480}{3}$

(21) (a) 7920 (b) 252 (c) -1760 (d) 180

(e) 84 (f) 1320 (g) 768 (30) $\frac{7}{8}$ (31) 4

(32) t_{30}, t_{31} (33) $n = 9, a = \frac{2}{3}$

(34) $x = 2,\ n = 7,\ a = 1$ (35) 14

பயிற்சி 6-3.

(1) (i) $1 - 2x + 3x^2$ (ii) $1 + 2x + 3x^2$

(iii) $1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2$ (iv) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$

(2) 504 (3) 5099019 (4) (i) 9993 (ii) 10,009

(iii) 919 (iv) .010 (v) ·020

(7) (2) 93 (3) $-0{\cdot}0613$ (4) $0{\cdot}017$

(6) 58 (7) 126 (9) (a) n^3-n (b) n^2+2n

(c) n^2+4n-1

(10) (a) $n(n+1)^2$ (b) $\dfrac{2n^3-15n^2+49n}{6}$

(c) $5n(n+1)-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n$

(11) (a) $\dfrac{3^{n+1}-3}{2}+3n+n(n+1)$

(b) $3^{n+1}-3+\dfrac{n(n+1)}{2}+2n$

(c) $2^{n+1}+\dfrac{n^2+7n-4}{2}$

(12) 6·60 தோராயமாக.

பகுதி—B

1. சில அடிப்படை உண்மைகள்

1.1. முகவுரை

திரிகோணமிதி என்பது கோண அளவு என்ற பொருள்படும். கிரேக்கமொழிச் சொல்லிலிருந்து வந்தது ஆகும். முக்கோணங்களின் தெரியாத கோணங்கள், பக்கங்கள் இவற்றைக் கணக்கிடுவதற்கே திரிகோணமிதி ஆரம்பத்தில் பயனபடுத்தபபட்டு வந்தது. ஹிப்பார்சஸ் (Hipparchus B C 180—125) போனற கிரேக்கர்கள் திரிகோணமிதியை வளர்த்தாாகள. மேலும, ஹிப்பார்சஸ் வானஇயல் சாத்திரத்தில் தனககிருநத அறிவின் காரணமாக முப்பரிமாண திரிகோணமிதியையும் கணடு வளர்த்தார்.

அறிவியலின் ஒவ்வொரு துறையிலும் திரிகோணமிதி அதிக அளவில் இன்று பயன்படுத்தப்படுகின்றது. மேலும, இது நுண் கணிதத்திலும் அதிக அளவில் பயன்படுத்தபபடுகினறது.

அதிர்வுகள், திசைமாறு மின்சாரம், ஒலி, அலைகளின, அசைவு இவற்றைப்பற்றி நாம் கற்கும்பொழுது திரிகோணமிதி மிகவும் உறுதுணையாக உள்ளதைக் காணலாம்.

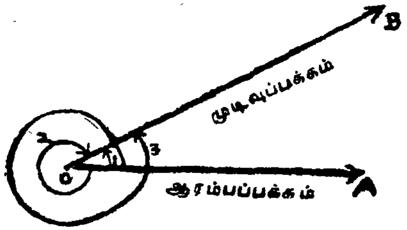
1.2. கோணங்கள்

ஒன்றின்மீது ஒன்றுகப் பொருந்தாத இரு கதிர்களின் வெட்டுக்கணமே கோணம் என்று நாம் ஜியோமிதியில் படித்துள்ளோம். அவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்ட கோணத்தின் அளவு 180°ஐ விடக் குறைவாகத்தான் இருக்கவேண்டும். ஆனல், சக்கரங்கள் போன்ற சுற்றும் பொருள்களைப் பற்றிப் படிக்கும்போது எல்லா அளவிலுமான கோணங்கள் தேவைப்படுகின்றன. எனவே, கோணத்தின் வரையறையை அவற்றின் அளவுகள் குறை அல்லது மிகை மெய்யெண்களாக இருக்கும்படியாக எவ்வாறு மாற்றுவது என்பதைக் காண்போம்.

வரையறை

ஒரு நிலையான புள்ளியை ஆதாரமாகக் கொண்டு ஆரம்ப நிலையிலிருந்து ஒரு முடிவு நிலைக்குச் சுற்றும் கதிரினால் உண்டாக் கபபடுவதே கோணம் ஆகும். அவ்வாறு உண்டாக்கப்பட்ட கோணததின் அளவு அக்கதிர் சுற்றும் சுற்றின் அளவைப் பொறுத்தது ஆகும்.

அக்கதிர்களின் ஆரம்பநிலை கோணத்தின் ஆரம்பப் பக்கம் அலலது ஆதாரப பக்கம் எனவும், அக் கதிரின் முடிவுநிலை கோணததின் முடிவுப் பக்கம் எனவும் வழங்கப்படும். அந் நிலையான ஆதாரப் புள்ளி கோணமுனை என வழங்கப்படும். நாம் கோணம் என்று குறிப்பிடும்பொழுது அக்கோண அளவையையே குறிக்கிறோம் என்பதை நினைவில் கொள்ள வேண்டும். பக்கத்தில் கண்ட படத்தில் மூன்று கோண அளவுகள் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. கதிரின் சுற்று 'வலச் சுற்றாக' இருப்பின் கோணம் மிகைக் கோணம் எனவும், 'இடச்சுற்றாக' இருப்பின் கோணம் குறைக்கோணம் எனவும் குறிக்கப்படும். வளைந்த அம்புககுறி கதிரின் சுற்றுத் திசையையும், சுற்றும் அளவையை யும் குறிககப பயன்படுகின்றது. திரிகோணமிதியால் நாம் பயன் படுத்தும் எல்லாக் கோணங்களும் திசையிட்ட கோணங்கள் ஆகும்.



படம் 1-1

கோண அளவிற்கு எந்த எல்லை அளவும் கொடுக்கப்பட விலலை என்பதை நினைவில் கொள்க. ஒரு கடிகார முட்காட்டி இரண்டு மணி நேர அளவில் $-720°$ சுற்றும் [ஏன் எனச் சிந்திக்க].

கோண அளவுகளின் அலகுகள் பாகைகளில் அல்லது ரேடியன்களில் குறிக்கப்படும். ஒரு வட்டத்தின் பரிதியை 360 பாகங்களாகப் பிரித்து அப்பாகம் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு 'பாகை' எனக் குறிப்பர். ஒரு பாகையினை 60 சிறு கூறுகளாகப்

பிரித்து அக் கூறுகளைக் 'கலைகள்' எனவும், ஒவ்வொரு கலையையும் 60 சிறு கூறுகளாகப் பிரித்து அச் சிறு கூறுகள் ஒவ்வொன்றினையும் 'விகலைகள்' என்றும் கூறுவது வழக்கம்.

எனவே, 1 பாகை = 60 கலைகள் = 60′

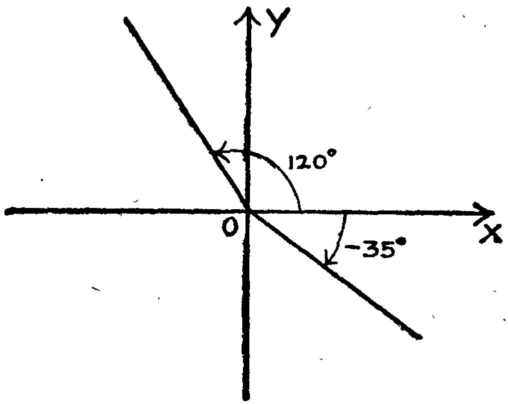
1 கலை = 60 விகலைகள் = 60″ ஆகும்.

பொதுவாகக் கோணங்கள் $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \phi$ போன்ற கிரேக்க எழுத்துகளால் குறிக்கப்படும்.

$-90° < \theta < 90°$ என்ற நிலையில் அமைந்துள்ள கோணங்கள் குறுங்கோணங்கள் எனப்படும்.

1-3. ஒரு கோணத்தின் அடிப்படை அமைப்பு

ஒரு கோணத்தின் கோணமுனை 'ஆதாரப்புள்ளி' எனப்படும் (0, 0) என்ற புள்ளியிலும், அதன் ஆரம்பப் பக்கம் X-அச்சின் மிகைப் பக்கத்திலும் அமைந்திருந்தால் அக்கோணம் ஓர் அடிப்படை அமைப்பைப் பெற்றுள்ளது என்போம்.



படம் 1-2

படம் 1-2-ல் 120°, −35° ஆகிய கோணங்களின் அடிப்படை அமைப்புக் காட்டப்பட்டுள்ளது. மிகைக்கோணம்

என்பது வலச்சுற்ருகச் சுற்றும் சுற்றினையும், குறைக்கோணம் என்பது இடச்சுற்ருகச் சுற்றும் சுற்றினையும் குறிக்கிறது என்பதை நினைவில் கொள்க.

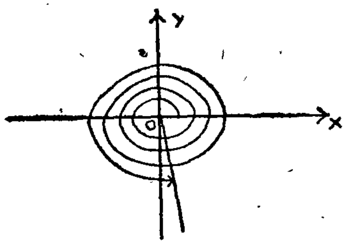
கோணங்களை முடிவுப பக்கங்கள் எந்தக் கால்பகுதியில் அமைகிறது என்பதைக்கொண்டு கோணங்களின் அடிப்படை அமைப்பை விவரிக்கலாம். இவ்வாறு 120°-ன் முடிவுப்பக்கம் இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமைந்துள்ளது. அதாவது 120° கோணம் இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனக கூறலாம். இவ்வாருகவே −35° என்பது நான்காவது கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனக்கூறலாம்.

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட அடிப்படைக கோணங்கள் ஒரே முடிவுப்பக்கத்தைக் கொண்டிருந்தால் அவற்றை ஒரே முடிவுப்பக்கத்தைக்கொண்ட கோணங்கள் என்று கூறலாம். உதாரணமாக 120°, 480°, −240° ஆகிய கோணங்கள் ஒரே முடிவுப்பக்கத்தைக் கொண்டவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

1360° கோணத்துடன் ஒரே முடிவுப்பக்கத்தைக் கொண்ட மிகச்சிறிய மிகைக் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு



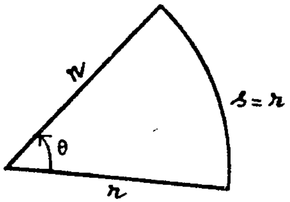
படம் 1-8

$$1360° = 3 \cdot 360° + 280°$$

அதாவது 1360° என்பது மூன்று முழுச்சுற்றுகளையும் 280° கோணத்தையும் கொண்டதாகும். எனவே 280° என்பதுதான் 1360° உடன் ஒரே முடிவுப் பக்கத்தைக் கொண்ட மிகச்சிறிய மிகைக் கோணமாகும்.

1-4. ரேடியன் அளவுகள்

வரையறை: சமவிற்கள் வட்டமையத்தில் தாங்கும் கோணங்களின் அளவுகள் சமமென்ற கூற்றினைப் பயன்படுத்தி, வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமான வில் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோண அளவு ஒரு 'ரேடியன்' ஆகும்.



படம் 1-4.

இவ்வாறாக படத்தில் வட்டவில் s = ஆரம் r எனில் மையக் கோணமான θ வின் அளவு ஒரு 'ரேடியன்' ஆகும்.

π என்ற எண் ரேடியன் அளவில் மிக முக்கியப் பங்கை வகிக்கின்றது.

$$\pi = \frac{\text{வட்டத்தின் சுற்றளவு}}{\text{வட்டத்தின் விட்டம்}}$$

'π' என்பது ஒரு நிலையான மெய்யெண் ஆகும்.

$\pi = 3.1415926536$ என்பது π-ன் பத்து தசமத்தானத்திற்குத் தோராய மதிப்பாகும்.

பயிற்சி 1-1.

(1) கீழ்க்கண்ட அடிப்படைக் கோணங்களையமைத்து அவை எந்தக் கால்பகுதியில் முடிகின்றன என்பதையும் அவற்றுடன் ஒரே முடிவுப்புள்ளியைக் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு கோணத்தினையும் தருக.

(a) $40°$ (b) $-120°$ (c) $200°$ (d) $740°$ (e) $-60°$
(f) $270°$ (g) $-180°$

(2) பின் வருவனவற்றைப் பாகைகளாகக் கூறுக:

(a) வலச்சுற்றில் ஒரு கால்பகுதியின் சுற்று.
(b) வலச்சுற்றாக $1\frac{1}{2}$ முழுச் சுற்றின் அளவு.
(c) இடச்சுற்றாக $\frac{1}{2}$ முழுச் சுற்றின் அளவு.
(d) இடச்சுற்றாக ஒரு முழுச்சுற்றின் அளவு.

(3) இரண்டு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 90° ஆனால், அவை நிரப்புக் கோணங்கள் எனப்படும். 70°, 42° ஆகியவற்றின் நிரப்பிகளைக் காண்க.

(4) இரண்டு கோண அளவுகளின் கூடுதல் 180° ஆனால், அவை மிகை நிரப்பிக கோணங்கள் எனப்படும். அவை ஒவ்வொன்றும் மற்றவற்றின் *மிகை நிரப்பி* என வழங்கப்படும். 90°, 30° ஆகிய கோணங்களின் மிகை நிரப்பிகளைக் காண்க.

1-5. *பாகைகளுக்கும் ரேடியன்களுக்கும் உள்ள சம்பந்தம்*

π-ன் வரையறையிலிருந்து

$c = 2\pi r$ எனத் தெரிகிறது. [c = வட்டத்தின் சுற்றளவு, r = வட்டத்தின் ஆரம்]

c-யும் r-ம் முறையே ஒரு முழுச்சுற்றின் கோண அளவான 360° யையும், 1 ரேடியன் அளவையும் குறிக்கின்றன.

$$\text{அதாவது } \frac{c}{r} = \frac{360^\circ}{1 \text{ ரேடியன்}}$$

$$\text{அதாவது } \frac{2\pi r}{r} = \frac{360^\circ}{1 \text{ ரேடியன்}}$$

$$\therefore \pi \text{ ரேடியன்கள்} = 180^\circ$$

[குறிப்பு :

(1) $1 \text{ ரேடியன்} = \dfrac{180^\circ}{\pi} = 57\cdot3^\circ$(சுமார்)

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} = 0\cdot0175 \text{ ரேடியன்கள் (சுமார்)}$$

(2) கோண அலகு கொடுக்கப்படாவிடின் ரேடியன் என்பது அலகாகும். இவ்வாறாக ஒரு கோணத்தின் அளவு 40 என்பது ஒரு கோணத்தின் 40 ரேடியன்கள் என்பதையும், ஒரு கோணம் 40° என்பது ஒரு கோணததின் அளவு 40 பாகைகள் என்பதையும் குறிக்கும்.]

எடுத்துக்காட்டு 1

90°-யினை ரேடியன் அளவில் கூறுக:

தீர்வு

$$180^\circ = \pi \text{ ரேடியன்கள்}$$

$$\therefore 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ ரேடியன்கள்}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

2 ரேடியன்களைப் பாகைகளாக மாற்றுக.

தீர்வு

$x^\circ = 2$ ரேடியன்கள் என்க.

ஆனால் $180^\circ = \pi$ ரேடியன்கள் ஆகும்.

$$\therefore \frac{x}{180} = \frac{2}{\pi}$$

$$x = \left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$$

எடுத்துக்காட்டு 3

'r' அலகை ஆரமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில் 's' அலகு நீளமுள்ள ஒரு வில் வட்டமையத்தில் θ ரேடியன் கோணத்தைத் தாங்குகிறது எனில் r, θ, s-க்குள்ள சம்பந்தத்தைக் காண்க.

தீர்வு

θ ரேடியன் கோணத்தை வில் 's' தாங்குகிறது.

1 ரேடியனை ஆரம் 'r' தாங்குகிறது.

$$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}$$

குறியீடுகளின் மூலம் இவற்றைக் குறித்தால்

$$s = \theta r \quad (\theta\text{-ரேடியனில்})$$

பயிற்சி 1-2.

(1) 1 ரேடியன் அளவுள்ள ஒரு கோணத்தை (a) 3 அலகு ஆரமுடைய (b) 4 அலகு ஆரமுடைய வட்டத்தில் அமைக்க. இவற்றிலிருந்து ரேடியன் அளவு வட்ட ஆரத்தைப் பொறுத்து அமையாது என்பதை நிரூபிக்க இயலுமா?

(2) பாகைகளிலிருந்து பின்வருவனவற்றை ரேடியன்களுக்கு மாற்றுக :

(a) $45°$ (b) $270°$ (c) $120°$ (d) $30°$ (e) $60°$ (f) $\pi°$
(g) $121{\cdot}5°$

(3) பின்வரும் கோண அளவுகளை ரேடியன் அளவிலிருந்து பாகை அளவுகளுக்கு மாற்றுக :

(a) $\frac{3\pi}{4}$ (b) $\frac{4\pi}{5}$ (c) 3π (d) $-\frac{\pi}{4}$ (e) $\frac{5\pi}{3}$

(f) 3

(4) 10 செ.மீ. நீளமுள்ள ஓர் ஊசல் $30°$ கோண அளவிற்கு அசைகின்றது. அவ்வூசலின் அலைவு தூரத்தைக் காண்க.

1-6. சத அடிமான முறை

கோணங்களின் பாகை அலகுகளைப்பற்றிக் கற்கும்பொழுது அவை 60 சிறு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன என்று கண்டோம். எனவே, இவை 60 அடிமான முறை என வழங்கப் பெறும். மேலும், பிரான்சு போன்ற நாடுகளில் சத அடிமான முறை பயன்பட்டு வருகின்றது. இம் முறையின் வாய்பாடு கீழ் வருமாறு:

1 செங்கோணம் = 100 கிரேடுகள் = 100^g

1 கிரேடு = 100 கிமிடங்கள் = $100'$

1 கிமிடம் = 100 விநாடிகள் = $100''$

2. திரிகோணமிதி சார்புகள்

2-1. ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி சார்புகள்

மதிப்பகத்திலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் வீச்சகத்திலுள்ள ஒரே ஓர் உறுப்புடன் கொண்டிருக்கும் உறவைத் தருவது 'சார்பு' என்பதை நினைவில் கொள்க. கோணங்களின் கணத்தை மதிப்பகமாகவும், மெய்யெண்களின் கணத்தை வீச்சகமாகவும் கொண்டு நாம் இப்பொழுது ஆறு புதிய சார்புகளை வரையறுப்போம்.

$$\angle XOT = \theta \text{ என்க.}$$

$P(x,y)$ என்பது மூலத்திலிருந்து வேறுபட்ட ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க. மேலும் இப் புள்ளி θ-ன் முடிவுப்பக்கத்தில் அமைந்துள்ளது என்போம். 'திசைகூடிய கோட்டுத்துண்டு' $\overline{OP}$ என்பது ஆரக்கோடு என வழங்கப்பெறும். இதன் நீளத்தை மிகை 'r' என எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore OP = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

ஒவ்வொரு 'θ' உடனும் x, y, r சம்பந்தப்பட்ட ஆறு விகிதங்களை நாம் எடுத்துக்கொண்டு அவற்றிற்குக் கீழ்க்கண்ட சிறப்புப் பெயர்களைத் தருவோம்.

θ-ன் sine $= \dfrac{y}{r}$; $\sin\theta$ என எழுதப்படும்.

θ-ன் cosine $= \dfrac{x}{r}$; $\cos\theta$ என எழுதப்படும்.

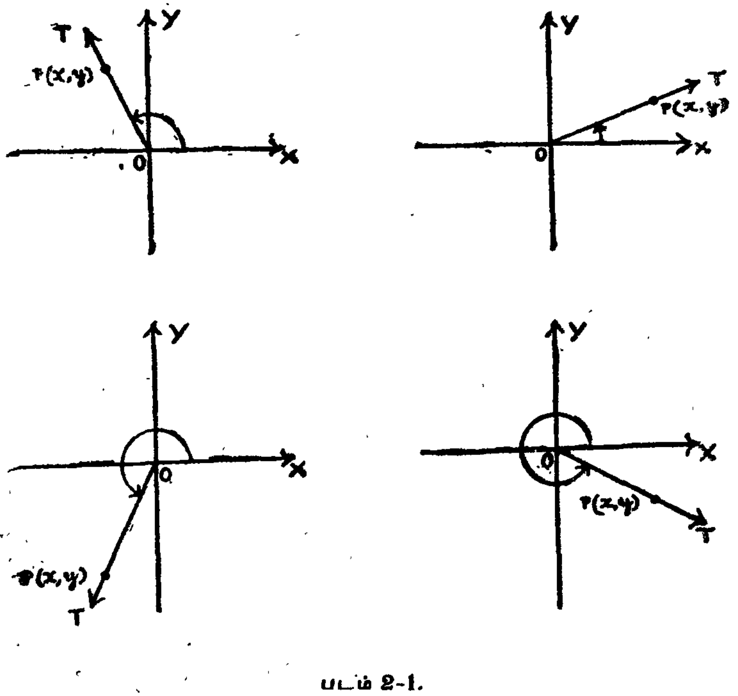
θ-ன் tangent $= \dfrac{y}{x}$; $\tan\theta$ என எழுதப்படும் $(x \neq 0)$.

θ-ன் cotangent $= \dfrac{x}{y}$; $\cot\theta$ என எழுதப்படும் $(y \neq 0)$.

θ-ன் secant $= \dfrac{r}{x}$; sec θ என எழுதப்படும் $(x \neq 0)$.

θ-ன் cosecant $= \dfrac{r}{y}$; cosec θ என எழுதப்படும்.

[cosec θ சில கணித நூல்களில் csc θ என எழுதப் படுகிறது.]

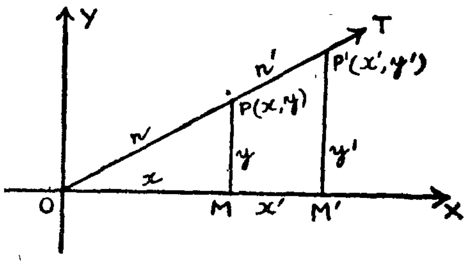


படம் 2-1.

[குறிப்பு :

(1) இவ்விகிதங்கள் $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் அச்சுத் தூரங்களால் விவரிக்கப்பட்டிருப்பினும் இவை $r \neq 0$, மற்றும் P என்பது $\overrightarrow{OT}$-ன் மீது அமைந்துள்ளது என்ற உண்மைகளைச் சார்ந்தே அமைந்துள்ளன என்பதை நினைவிற் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக $r \neq 0$ என்ற ஆரத்துடன் $\overrightarrow{OT}$-ன்மீது $P'(x', y')$ என்ற வேருெரு புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டால், $\sin\theta = \frac{y'}{r'}$; $\cos\theta = \frac{x'}{r'}$; $\tan\theta = \frac{y'}{x'}$ ... ஆனல் OMP; OM′P′ என்ற வடிவொத்த முக்கோணங்களில் இருந்து $\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$; $\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$; $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$ ...... என்பதை நாம் அறிகிருேம். இவ்வாருக sin θ, மற்றும் மற்ற திரிகோணமிதி சார்புகள் θ-ன் மதிப்பைச் சார்ந்தே உள்ளனவென்றும், $\overrightarrow{OT}$-ன் மீதுள்ள புள்ளி 'P''-ன் இருப்பிடத்தைச் சார்ந்து அமையவில்லை என்றும் அறிகிருேம்.



படம் 2-2.

(2) $P(x, y)$ என்ற புள்ளி $\overrightarrow{OT}$-ன்மீது எவ்விடத்திலும் அமையலாம் என்பதைக் குறிப்பு (1)-லிருந்து நாம் தெரிந்து கொள்கிருேம். ஆனல், நாம் கணக்கிடுவதற்கு வசதியாக $r = 1$ என எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

(3) இவ்வாருகத் திரிகோணமிதிச் சார்புகள் அடிப்படைக் கோணங்களுககு வரையறுக்கப்பட்டன. சர்வ சமமுடைய அடிப்படைக் கோணத்தைக் காண முடியும் என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்தி மேலே வரையறுக்கப்பட்ட திரிகோணமிதிச் சார்புகளை நாம் தளத்தில் உள்ள எல்லாக் கோணங்களின் கணக்கிற்கும் பயன்படுத்த முடியும்.

(4) மேலே வரையறுக்கப்பட்ட ஆறு திரிகோணமிதிச் சார்புகளும் 'திசையிட்ட எண்கள்' ஆகும். கோணம் முடியும் கால் பகுதியில் உள்ள x, y-இவற்றின் குறிகளைப் பொறுத்தே அவை மிகை அல்லது குறை என்று வரையறுக்கப்படுகின்றன. கோணத்தின் குறியைமட்டும் கொண்டு திரிகோணமிதிச் சார்பின் குறி வரையறுக்கப்படுவதில்லை. குறிப்பாக cos 210 என்பது குறை எண் எனவும் நாம் பின்னல் நிரூபிக்க இயலும்.

(5) cosec θ என்பது sin θ-ன் தலைகீழி எனில், cos θ, tan θ-இவற்றின் தலைகீழிகள் யாவை எனக் காண்க.]

பயிற்சி 2-1.

(1) sin 45, sin 405 என்பன சம மதிப்புடையவை. விளக்குக.

(2) $r = 1$ என அமையுமாறு (x, y) எனும் புள்ளி θ-ன் முடிவுப் பக்கத்தில் அமைந்திருக்கிறதெனில் sin $\theta = y$, cos $\theta = x$ என்ற முற்றொருமைகளைச் சரிபார்க்க.

(3) '$-150°$' என்ற கோணத்தை அமைக்க.

$r = 1$ என எடுத்துக்கொண்டு x, y இவற்றின் மதிப்புகளைக் கணிக்க. sin $(-150°) = -0{\cdot}5$ என்பதைச் சரிபார்க்க. மேலும் cosec $(-150°)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

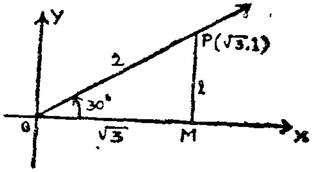
(4) $P(3, 4)$ என்ற புள்ளியை θ-வின் முடிவுப் பக்கத்தில் எடுத்து θ என்ற கோணத்தை அதன் அடிப்பாகை இருப்பில் அமைத்து ஆறு திரிகோணமிதி விகிதங்களையும் கணிக்க. பின் sin θ. cos θ. tan θ. cot θ. sec θ. cosec $\theta = 1$ என்பதைச் சரிபார்க்க.

2-2. சிறப்புக் கோணங்களின் சைன், கொசைன் மதிப்புகள்

சைனையும், கொசைனையும் பயன்படுத்த வேண்டுமெனில் எந்த ஒரு திசைக் கோணத்திற்கும் சைன், கொசைன் இவற்றின் மதிப்புகள் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். எனவே, நாம் அதிகமாகப் பயன்படுத்தும் சில சிறப்புக் கோணங்களுக்கு சைன் மதிப்பையும் கொசைன் மதிப்பையும் காண்போம்.

(a) sin 30, cos 30—*இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்*

30° கோணத்தை வரைந்து கொள்க. இதன் முடிவும் பக்கத்தில் $OP = 2$ என இருக்குமாறு P என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. [30°, 60°, 90° என அமைந்துள்ள முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் விகிதம் $1 : \sqrt{3} : 2$ என்பதை நினைவு கூர்க]. எனவே P-ன் அச்சுத் தூரங்கள் $(\sqrt{3}, 1)$ ஆகும்.



படம் 2-3.

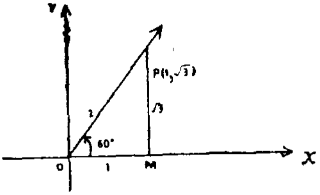
இதிலிருந்து $\sin 30° = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ என்றும்

$$\cos 30° = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ என்றும் அறிகிறோம்.

[குறிப்பு :

$$\tan 30 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ஆகும்.]

(b) sin 60°, cos 60°—*இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்*



படம் 2-4.

60° கோணத்தை வரைந்து கொள்க. $OP = 2$ என எடுத்துக் கொள்க. எனவே P-ன். அச்சுத் தூரங்கள் $(1, \sqrt{3})$ ஆகும்.

மேலுள்ள படத்திலிருந்து $\sin 60° = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

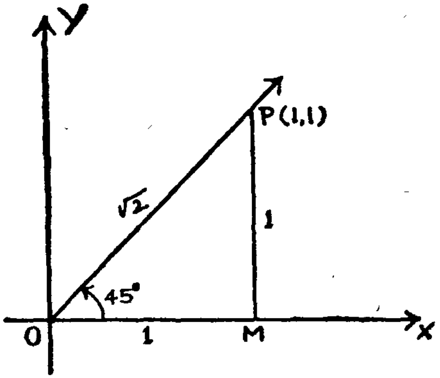
$$\cos 60° = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$ என அறிகிறோம்.

[குறிப்பு :

$$\tan 60^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$]

(c) sin 45°, cos 45° *இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்*

இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் $1 : 1 : \sqrt{2}$ என்ற விகிதத்தில் அமைந்திருக்கும் என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே. 45° கோணம் ஒன்று வரைந்து அதில் $OP = \sqrt{2}$ என இருக்குமாறு P என்ற ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. P-ன் அச்சுத்தூரங்கள் (1, 1) என அமையும்.



படம் 2-5.

இதனின்று
$$\sin 45 = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45 = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45 = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$ எனக் காணலாம்.

(d) sin 0, cos 0—*இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்*

$\theta = 0$ என இருக்கும் ஒரு கோணத்தின் முடிவுப் பக்கம் அதன் ஆரம்பப் பக்கத்துடன் இணைந்துவிடும். P என்ற புள்ளியை (1, 0) என இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டால் $x = 1$, $y = 0$,

$r = OP = 1$ என ஆகிறது.

$$\text{எனவே} \quad \sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

[குறிப்பு :

$$\tan 0° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$]

(e) sin 90°, cos 90° *இவற்றின் மதிப்புகளைக் காணுதல்*

$\theta = 90°$ என இருக்கும் ஒரு கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் y அச்சுடன் இணைந்து இருக்கும். P என்ற புள்ளி (0, 1) என இருக்குமாறு எடுத்துக்கொண்டால் $x = 0$, $y = 1$, $r = OP = 1$ என அமைகின்றது.

$$\text{இதிலிருந்து} \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

என அறிந்து கொள்ளலாம்.

[குறிப்பு :

$$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \text{ (வரையறுக்கப்படாதது.)}$$]

மேலே கண்டவற்றில் θ என்ற கோணம் முதல் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது என எடுத்துக்கொண்டோம். இவ்வாறுகவே மற்ற கால்பகுதிகளிலும் θ-வை அமைத்து அவற்றின் திரிகோணமிதி சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காணலாம். மேலும் சைன், கொசைன், டேன்ஜண்ட் இவற்றின் தலைகீழிகளான கொசீக்கண்ட், சீகண்ட், கோடேன்ஜண்ட் இவற்றின் மதிப்புகளையும் காணலாம்.

பயிற்சி 2-2.

(1) பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\operatorname{cosec}\theta$					

(2) பின்வரும் திரிகோணமிதி சார்புகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(a) 225° (b) 120° (c) −270° (d) 180° (e) 300°

(3) பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க:

(a) $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

(b) $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ$

(c) $\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ$

(d) $2\sin 45^\circ . \cos 45^\circ = 1$

(e) $(\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2 = 1$

(f) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ . \sin 60^\circ = 1$

(g) $\sin \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1-\cos \pi/3}{2}}$

(h) $\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1+\cos \pi/3}{2}}$

(i) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

(j) $\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ$

2-3. திரிகோணமிதி சார்புகளின் குறிகள்

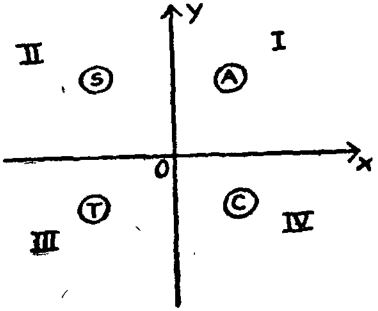
ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி சார்புகளின் இயற்கணிதக் குறிகள் அக் கோணத்தின் முடிவுப்பக்கத்தில் அமைந்துள்ள (எந்த) ஒரு புள்ளியின் x அச்சுத்தூரம், y அச்சுத்தூரம், அப் புள்ளியின் ஆரஅளவு இவற்றைப் பொறுத்தே அமைகின்றன. கோணத்தின் முடிவுப்பக்கம் ஒரு கால்பகுதியிலிருந்து மற்ற கால்பகுதிக்குச் செல்வதின் காரணமாக 'ஆரக்கோடு' எப்பொழுதும் மிகை எண்ணாகவே இருக்கும். ஆனால், அப் புள்ளியின் x அச்சுத் தூரம், y அச்சுத்தூரம் இவற்றின் குறிகள் மாறும். முதற் கால்பகுதியில் x, y இவை இரண்டுமே மிகை எண்கள். இரண்டாம் கால்பகுதியில் x குறை எண்ணாகவும், y மிகை எண்ணாகவும் இருக்கும்.

மூன்றும் கால்பகுதியில் x, y இவை இரண்டுமே குறை எண்களாக இருக்கும்.

நான்காம் கால்பகுதியில் x மிகை எண்ணாகவும், y குறை எண்ணாகவும் அமையும். இவை சுருக்கமாகப் பின்வரும் அட்டவணையில் தொகுத்துத் தரப்பட்டுள்ளன.

கால் பகுதி	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

மேற்கண்டவற்றை 'All Silver Tea Cups' என்றும், ASTC என்றும் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளலாம்:



படம் 2-6.

அதாவது முதற் கால்பகுதியில் எல்லா திரிகோணமிதி விகிதங்களும், இரண்டாவது கால்பகுதியில் சைனும் அதன் தலைகீழியான கொசிகண்ட்டும், மூன்றாவது கால்பகுதியில டேன்ஜண்ட்டும் அதன் தலைகீழியான கோடேன்ஜண்டடும், நான்காவது கால்பகுதியில் கொசைனும் அதன் தலைகீழியான சீகண்ட்டும் மிகைமதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் என்பதை 'ASTC' என்பது விளக்குகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1

$\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ எனற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்ட α என்ற கோணம் எந்தக் காலபகுதியில அமையும் என்பதைக் காண்க.

$\sin \alpha > 0$ என்பது முதல், இரண்டாம் கால்பகுதிகளிலும்,

$\cos \alpha < 0$ என்பது இரண்டாம், மூன்றும் கால்பகுதிகளிலும் சரியாகும்.

எனவே, α என்ற கோணம் இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2

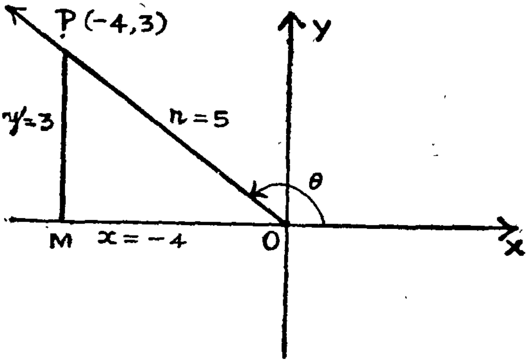
$\tan \theta = -\frac{3}{4}$, மேலும் θ இரண்டாம் கால் வட்டப் பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனில், மற்ற திரிகோணமிதி விகிதங்களைக் காண்க.

வரையறையிலிருந்து $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ஆகும்.

$$\frac{y}{x} = -\frac{3}{4}$$

θ என்ற கோணம் இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது. $y : x = 3 : 4$ என இருக்குமாறு பல புள்ளிகளை நாம் எடுக்கலாம். ஆனால் நாம் நம் வசதிக்காக $P(-4, 3)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

படத்தில் கண்டவாறு 'θ' என்ற கோணத்தை வரைக.



படம் 2-7.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{16 + 9}$$
$$= 5$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5};\ \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4};\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5};\ \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3};\ \sec\theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{4}$$

ஆகும்.

பயிற்சி 2 - 3.

(1) பின் வரும் நிபந்தனைகளுக்கேற்ற கோணம் எந்தக் கால்பகுதியில் அமையும் என்பதைக் காண்க.

(a) sin θ-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண்; tan θ-ன் மதிப்பு ஒரு மிகை எண்.

(b) $\cos\theta > 0$; $\tan\theta < 0$

(c) $\tan\theta < 0$; $\cos\theta < 0$

(2) "$\sin\theta$-ன் குறி எப்பொழுதும் y-ன் குறியைப் பொறுத்தே அமையும்" என்ற வாக்கியத்தைச் சரிபார்க்க. இதேபோல் $\cos\theta$-க்குப் பொருந்துமாறு ஒரு வாக்கியத்தை அமைக்க முடியுமா ?

(3) $|\sin\theta|$-ன் மதிப்பு 1 ஐ விட மிகுமா ?

$|\cos\theta|$-ன் மதிப்பு 1 ஐ விட மிகுமா ?

(4) $0 < \theta < 90°$ என இருக்கும்பொழுது பின்வரும் சோடிகளில் எது பெரியது என்பதைக் காரணத்துடன் விளக்குக:

(a) $\sin\theta$ அல்லது $\tan\theta$?

(b) $\cos\theta$ அல்லது $\cot\theta$?

(5) $\sin\theta = \frac{5}{13}$, θ முதல் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனில், $\tan\theta$, $\sec\theta$ இவற்றைக் காண்க.

(6) $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, θ மூன்றும் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனில், $\text{cosec}\,\theta$, $\sin\theta$ இவற்றைக் காண்க.

(7) $\tan\theta = \frac{2}{5}$, $\sin\theta < 0$ எனில், $\cos\theta$ வைக் காண்க.

(8) $270° < \theta < 360°$, $\tan\theta\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ எனில, மற்ற திரிகோண மிதி விகிதங்களைக் காண்க.

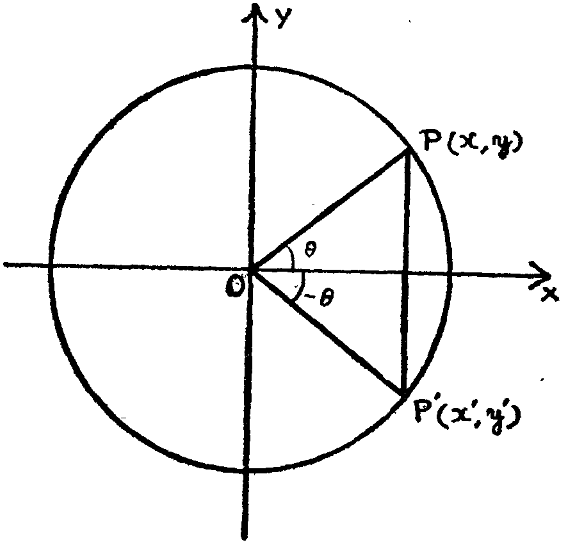
(9) $\sec A = \frac{13}{5}$, A ஒரு குறுங்கோணம் எனில்,

$$\frac{2\sin A + 3\cos A}{4\sin A - 9\cos A}$$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(10) A ஒரு குறுங்கோணம். $\tan A = \frac{2mn}{m^2+n^2}$ எனில், $\cos A$, $\operatorname{cosec} A$ இவற்றின் மதிப்பைக் காண்க.

2-4. குறைக்கோணங்களின் சார்புகள்

θ என்பது ஒரு குறுங்கோணமெனில் அதன் குறைக்கோணம் $-\theta$ எனக் கொள்க. பின்வரும் படத்தில் P, P' என்பன $\theta, -\theta$ என்ற கோணங்களின் முடிவுப்பக்கங்கள் 'அலகு வட்டத்தை' வெட்டும் புள்ளிகளாகும்.



படம் 2-8.

$P(x, y)$; $P'(x', y')$ எனக் கொள்க.

$\therefore$ θ-வின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x' = x$; $y' = y$

ஆனால் $x' = \cos(-\theta)$; $y' = \sin(-\theta)$

$x = \cos\theta$; $y = \sin\theta$

எனவே, $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

மேலும், $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$ எனவும் அறியலாம்.

[குறிப்பு :

இங்கே நாம் $-\theta$-வின் திரிகோணமிதி விகிதங்களோடு ஒப்பிட்டுள்ளோம். இதேபோல் $k\frac{\pi}{2} \pm \theta;\ k \in Z$ என்ற வடிவில் உள்ள கோணங்களின் திரிகோணமிதி விகிதங்களை θ-ன் திரிகோணமிதி விகிதங்களோடு ஒப்பிடமுடியும். இவற்றைப் பின்னர் காண்போம்.]

எடுத்துக்காட்டு

$\cos(-60°)$; $\sin(-60°)$ இவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு

$\cos(-60) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

2-5. *சில அடிப்படை முற்றொருமைகள்*

ஆறு திரிகோணமிதி விகிதங்களே வரையறுக்கப்பட்டிருப்பினும், அவ்விகிதங்களுக்கிடையே பலவித சம்பந்தங்கள் இருப்பதையே நாம் காணமுடிகிறது. அனைத்துக் கோணங்கட்கும் மெய்யாகும் அத்தகைய முற்றொருமைகள் சிலவற்றை இப்பொழுது காண்போம்.

(1) $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\,\theta}$; $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$;

$$\sin\theta.\ \text{cosec}\,\theta = 1$$

இதேபோல் $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$; $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$;

$$\cos\theta . \sec\theta = 1$$

மேலும், $\tan\theta = \frac{1}{\text{cct}\,\theta}$; $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$;

$$\tan\theta . \cot\theta = 1$$

(2) மேலும் $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

என நாம் தீர்மானிக்கலாம்.

(3) $\sin\theta = \frac{y}{r}$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$ என்பதனின்று,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2}$$

$$= \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

$$= \frac{y^2 + x^2}{r}$$

$$= \frac{r^2}{r^2} \quad \left[\because x^2 + y^2 = r^2\right]$$

$$= 1$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ எனத் தெரிகிறது.

இதிலிருந்து $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ எனவும்

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ எனவும் அறியலாம்.

மேலும் $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ஐ $\cos^2\theta$ ஆல் வகுக்க

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ எனக் கிடைக்கும்.

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$; $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

எனவும் நாம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

இதேபோல் $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$;

$\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta - 1$; $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

எனவும் நிருபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$ என நிரூபி.

தீர்வு

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$\tan\theta + \sec\theta = p$ எனில் $\tan\theta$, $\sec\theta$, $\sin\theta$ இவற்றை p-ன் மூலம் தருக.

தீர்வு

$$\sec\theta + \tan\theta = p \qquad \ldots (1)$$

ஆனால் $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ஆகும்

அல்லது $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$ ஆகும்.

அல்லது $p(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

அல்லது $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1}{p}$ $\qquad \ldots (2)$

(1) + (2) $\qquad 2\sec\theta = p + \dfrac{1}{p} = \dfrac{p^2+1}{p}$

$$\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$$

(1)—(2) $\qquad \tan\theta = \dfrac{p^2-1}{2p}$

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$$

பயிற்சி 2-4.

(1) $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

என நிரூபிக்க.

(2) பின்வரும் முற்றொருமைகளை நிரூபிக்க:

(i) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(ii) $\left[\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right] = (\tan\theta + \sec\theta)^2$

(iii) $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} + \dfrac{\cos A - \cos B}{\sin A - \sin B} = 0$

(3) $\tan^2 A - \tan^2 \theta = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \times \cos^2 B}$ என்று

நிரூபிக்க.

(4) $(1 + \cot A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \sec A) = 2$

என நிரூபிக்க.

(5) (i) $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A)$

$= \sec A + \operatorname{cosec}$

(ii) $(1 + \cot A + \tan A)(\sin A - \cos A)$

$= \dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sec^2 A}$ என நிரூபிக்க.

(6) $\dfrac{1}{\sec\phi + \tan\phi} = \sec\phi - \tan\phi = \dfrac{1-\sin\phi}{\cos\phi}$

என நிரூபிக்க.

(7) பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $$\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

(ii) $$\frac{\sec A - \tan A}{\sec A + \tan A} = 1 - 2 \sec A . \tan A + 2 \tan^2 A$$

(8) $$(\sin x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2 = 7 + \tan^2 x + \cot^2 x$$

என நிரூபிக்க.

(9) $x = a \cos \phi + b \sin \phi$

$y = a \sin \phi - b \cos \phi$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து ϕ ஐ நீக்குக.

(10) $\tan A + \sin A = m$; $\tan A - \sin A = n$ எனில்

$m^2 - n^2 = \sqrt{mn}$ என நிரூபிக்க.

3. திரிகோணமிதி சார்புகளின் வரைபடங்கள்

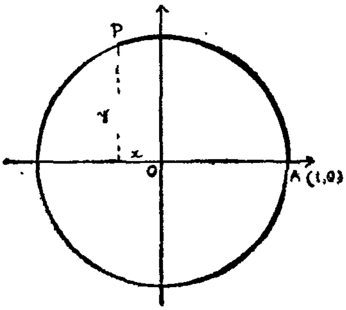
3-1. ஓர் எண்ணின் திரிகோணமிதி சார்பு

நாம் ஒரு கோணத்தின் திரிகோணமிதி சார்புபற்றி இதுவரை படித்தோம். இப்பொழுது ஓர் எண்ணின் (குறிப்பிட்ட கோணமின்றி) திரிகோணமிதி சார்பை வரையறுக்க முடியுமா எனக் காண்போம்.

p என்பது வரையறுக்கப்பட்ட மெய் எண். O (0, 0) என்பது அலகு வட்டத்தின் மையம். A (1, 0) என்பது ஒரு புள்ளியாகும். p என்பது மிகை எண் ஆனால், இடச்சுற்றாகவும் p என்பது ஒரு குறை எண் ஆனால், வலச்சுற்றாகவும் A-யினின்று வட்டப்பரிதியில் செல்வோம்.

$\widehat{AP} = |p|$ என இருக்குமாறு p என்ற புள்ளியைக் குறிக்க. p-ன் அச்சுத் தூரங்கள் (x, y) என்றால், பின்வரும் திரிகோணமிதி சார்புகளை வரையறுக்கலாம் (வரையறுக்க முடிந்த இடங்களில்).

$$\sin p = y$$
$$\cos p = x$$
$$\tan p = \frac{y}{x}$$
$$\cot p = \frac{x}{y}$$
$$\sec p = \frac{1}{x}$$
$$\text{cosec}\, p = \frac{1}{y}$$



படம் 3-1.

[குறிப்பு :

$\tan \frac{\pi}{2}$ என்பது வரையறுக்கப்படவில்லை. ஏன்?]

நாம் இப்பொழுது மேலே கண்ட வரையறைக்கும், முன்னர் கண்ட வரையறைக்கும் உள்ள சம்பந்தத்தைக் காண்போம்.

அலகு வட்டமாதலால் $r = 1$

$\angle AOP$-ல் உள்ள ரேடியன்களின் எண்ணிக்கை

$=$ வில்லின் நீளம் p.

$\therefore$ sin (p என்ற எண்) $=$ sin (p ரேடியன்கள்)

$$= \sin\left(\frac{180}{\pi}\,p\right)^{\circ};$$

எனவே, Rஐ மதிப்பகமாகக் கொண்ட திரிகோணமிதி சார்புகள் பொருளுடையவை எனக் காணலாம்.

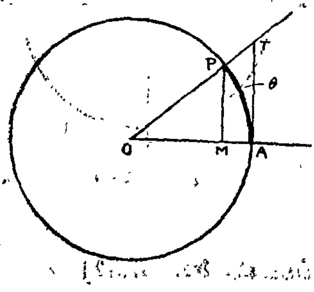
3-2. *திரிகோணமிதி சார்புகளின் மாறுபாடுகள்*

θ என்ற வில் 0-இலிருந்து 2π வரை அதிகரித்துக் கொண்டே செல்வதால், திரிகோணமிதி சார்புகளின் மதிப்புகளும் மாறுபடுகின்றன. sin, cos, tan சார்புகளில் ஏற்படும் மாறுபாடுகள்பற்றி நாம் இப்போது காண்போம்.

அலகு வட்டம் ஒன்று வரைக. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ என θ-க்கு ஒரு மதிப்பு எடுத்துக் கொள்க. $\overset{\frown}{AP} = \theta$ என இருக்குமாறு $\overset{\frown}{AP}$ என்ற வில்லைப் படத்தில் குறிக்க. $p(x, y)$ என்றால்,

$x = \cos\theta,\ y = \sin\theta.$

A (1, 0) என்ற புள்ளி வழியாக அவ்வட்டத்திற்கு ஒரு தொடுகோடு வரைக. Oஐயும், Pஐயும் சேர்த்து நீட்டுக. அது தொடுகோட்டை T-ல் வெட்டட்டும். வடிவொத்த முக்கோணங்களின் மூலமாக,



படம் 3-2.

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA}$$

$$= \frac{AT}{1}$$

AT-யின் நீளமென்பது tan θ மதிப்பிற்குச் சமம் எனத் தெரிகிறது. (θ-ன் டேன்ஜண்ட் எனப் பெயர் பெறக் காரணம் இதுவே என அறிக.)

இவ்வாறாக *y*, *x*, *PT* இவற்றின் தன்மைகளிலிருந்து θ மாறுபடும் பொழுது sin θ, cos θ, tan θ-இவற்றில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைப் பற்றி நாம் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

கால் பகுதி	I	II	III	IV
θ-ன் மாறுபாடு	0 முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரை	$\frac{\pi}{2}$ முதல் π வரை	$\frac{\pi}{2}$ முதல் $\frac{3\pi}{2}$ வரை	$\frac{3\pi}{2}$ முதல் 2π வரை
sin θ-ன் மாறுபாடு	0 முதல் 1 வரை	1 முதல் 0 வரை	0 முதல் -1 வரை	-1 முதல் 0 வரை
cos θ-ன் மாறுபாடு	1 முதல் 0 வரை	0 முதல் -1 வரை	-1 முதல் 1 வரை	0 முதல் 1 வரை
tan θ-ன் மாறுபாடு	0 முதல் ∞ வரை	$-\infty$ முதல் 0 வரை	0 முதல் ∞ வரை	$-\infty$ முதல் 0 வரை

tan θ-ன் கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள $\pm\infty$ என்ற மதிப்பை விவரிப்போம். θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ என்பது $\frac{\pi}{2}$ ஐ நெருங்க நெருங்க tan θ -ன் மதிப்பு அதிகரித்துக் கொண்டே செல்கிறது. அது சரியாக $\frac{\pi}{2}$ ஆக இருக்கும்பொழுது tan θ-ன் மதிப்பு அளவற்றதாகிறது. இதை tan $\frac{\pi}{2} = \infty$ எனக் குறிக்கிறோம். இரண்டாம் கால்பகுதியில் tan θ-ன் மதிப்பு குறை எண்ணாக இருக்கும். எனவே $-\infty$ என்று குறிப்பிடவும்பட்டுள்ளது.

[குறிப்பு :

1. sin, cos என்ற சார்புகள் ஒவ்வொரு 2π-க்குப் பிறகு மீண்டும் அதே மதிப்புகளைக் கொண்டவையாக மீளத் திரும்புகின்றன. ஆனால், tan சார்பு ஒவ்வொரு π-க்குப் பிறகும் மீளத் திரும்பும். பொதுவாக ஒரு நிலையற்ற சார்பு f என்பது, $f(x+k) = f(x)$ ($k > 0$; எல்லா x-க்கும்) என அமைந்திருந்தால் அது சீர்சுழல் சார்பு எனப்படும்.

k-ன் மிகக் குறைந்த மிகை மதிப்பு அச் சார்பின் சுழற்சி எனப்படும். எனவே, sin, cos, tan என்பன சீர்சுழல் சார்புகளாகும். sin, cos இவற்றின் சுழற்சி 2π ஆகும். tan-ன் சீர்சுழல் π ஆகவும் அமையும்.

2. $y = \sin x$ மற்றும் மற்ற திரிகோணமிதி சார்புகளின் வரைபடங்கள் வரைய $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi$ என்ற மதிப்புகளுக்கு ஒத்த y-ன் மதிப்பைக் கண்டு, அவற்றை (x, y) என்பதற்கு இசைந்த வரிசைச் சோடிகளாக அமைத்து நமக்குத் தேவையான திரிகோணமிதி சார்புகளின் வரைபடங்கள் வரையலாம். இவற்றை மிகச் சரியான முறையில் வரைய மேலும் சில மதிப்புகளை அவற்றின் அட்டவணைகளில் இருந்து தெரிந்து கொள்ளலாம்.]

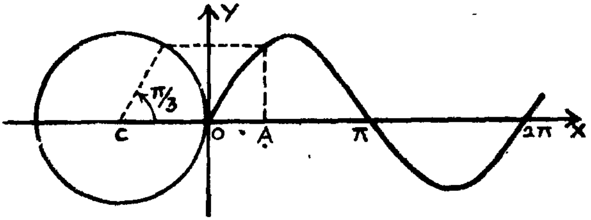
3-3. $y = \sin y$ என்பதன் வரைபடம்

$(x, \sin x)$ என்ற அமைப்பில் தேவையான புள்ளிகளை எடுத்து சைன் வளைகோட்டை வரையமுடியும் என்றாலும் ($0 \leq x \leq 2\pi$); பின்வரும் முறையிலும் $y = \sin x$-ன் வரைபடத்தை வரைய முடியும்.

$c(1, 0)$ என்பதை மையமாகக்கொண்ட ஓர் அலகு வட்டம் வரைக $x = \frac{\pi}{3}$ என்க. இதற்கு இசைந்த y-ன் மதிப்பைப்

பின்வரும் முறையில் காணலாம். வட்ட மையம் c-ல் $\frac{\pi}{3}$ என்ற கோணத்தை அமைக்க. x அச்சில் $OA = \frac{\pi}{3}$ என்ற திசையிட்ட தூரத்தைக் குறிக்க. $\frac{\pi}{3}$ -ன் முடிவுப் பக்கம் வட்டத்துடன் வெட்டும் புள்ளி வழியாக ஒரு கிடைக்கோடு வரைக. இது x-அச்சில் குறிக்கப்பட்ட A-யிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டை வெட்டும்வரை வரையப்படவேண்டும். இப் புள்ளியின் y அச்சு தூரமே $\sin \pi/3$ ஆகும். வரைபடம் வரையத் தேவைப்படும் நீளத்திற்கேற்ப θ–ன் பல மதிப்புகளுக்கு வரையப்படவேண்டும். இவ்வாறாகக் கிடைத்த $y = \sin x$ என்பதன் வரைபடம் கீழே படத்தில் தரப்பட்டுள்ளது.

$(0 \leq x \leq 2\pi)$



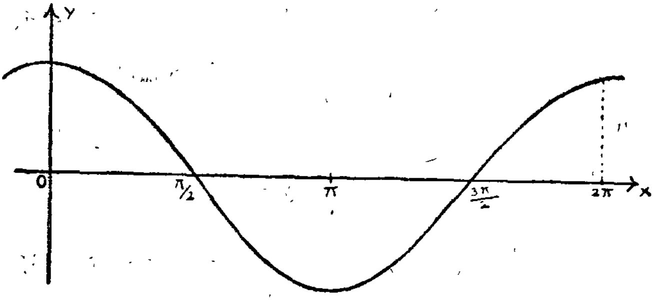
படம் 8-3.

இவ் வரைபடம் x அச்சை $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. மேலும், $x = \frac{\pi}{2}$ என்ற இடத்தில் உச்ச மதிப்பையும், $x = \frac{3\pi}{2}$ என்ற இடத்தில் குறைந்த மதிப்பையும் பெறுகிறது. இவ் வரைபடம் 2π சுழற்சியுள்ள வரைபடமாகும். இதை x அச்சின் இருபுறங்களிலும் நமக்குத் தேவைப்படும் அளவிற்கு நீட்டிக்கொண்டே செல்லலாம்

3-4. $y = \cos x$ என்பதன் வரைபடம்

$y = \cos x$ என்பதை $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ என எழுதலாம். எனவே cosine-ன் வரைபடம் sine-ன் வரைபடத்தைப் போலவே அமைந்திருக்கும். ஆனால், இது sine-ன் வரைபடத்திற்கு இடப்புறமாக $\frac{\pi}{2}$ என்ற அளவிற்குத் தள்ளப்படுகிறது.

cosine-ன் வரைபடம் x அச்சை $x + \frac{\pi}{2} = 0$, $x + \frac{\pi}{2} = \pi$, $x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ என்ற இடங்களில் வெட்டுகிறது. (ஏனெனில் sine-ன் வரைபடம் x-அச்சை $0, \pi, 2\pi$ என்ற இடங்களில் வெட்டுகிறது.) அதாவது $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ என்ற இடங்களில் x அச்சை cosine வளைவு வெட்டுகிறது. $x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ அல்லது $x = 0$ என்ற இடத்தில் இது உச்ச மதிப்பையும், $x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ அல்லது $x = \pi$ என்ற இடத்தில் இது குறைந்த மதிப்பையும் பெறுகிறது.



படம் 3-4.

இவ் வரைபடத்தை x-அச்சின் இருபுறங்களிலும் 2π என்ற சீர்சுழலுக்கேற்ப நீட்டிக்கொண்டே செல்லலாம்.

[குறிப்பு:

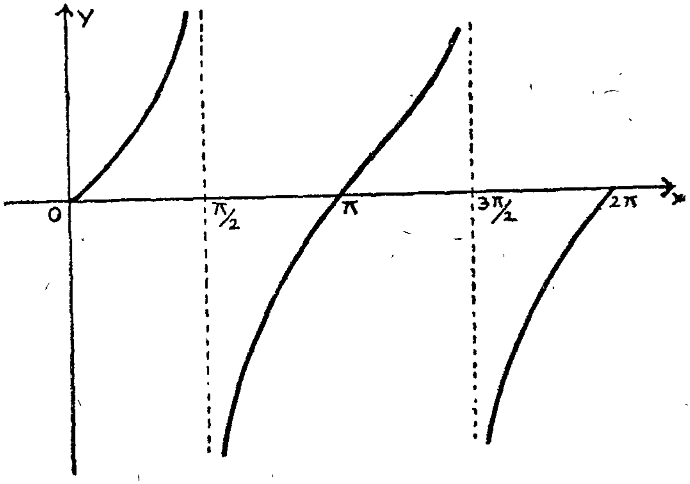
ஒரு சுழற்சி என்பது ஒரு முழு வளைவும், திரும்ப வர ஆகும் குறைந்தபட்ச கோட்டுத்துண்டின் நீளமும் ஆகும்.]

AC-ன் இயக்கத்தில் காலத்தின் சார்பாக வரைந்தால் ஒரு செகண்டிற்கு 60 சுழற்சிகளைக்கொண்ட ஒரு சைன் வளைவு கிடைக்கும். இதுபோலவே அதிரும் கம்பிகளின் அதிர்வுகளும் sine வளைவில் குறிக்கப்படலாம். sine, cosine வளைவுகள் கணிதத்தில் மிக அதிகமாகப் பயன்படுகின்றன.

3-5 $y = \tan x$ என்பதன் வரைபடம்

பின்வரும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி tan சார்பாக வரைபடத்தை வரையலாம்.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \tan \theta$	0	0·6	0·7	—	—1·7	—0·6
π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{2}$	2π
0	0·6	1·7	—	— 1·7	—0·6	0



படம் 3–5.

படம் 3 - 4—ல் புள்ளிக்கோடு 'தொடர் வரை' என வழங்கப்படும். இக் கோடுகளை வரைபடம் நெருங்கிய போதிலும், அவற்றை அடைவதில்லை. மேலும், x-ன் எம்மதிப்பிற்கு இச் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லையோ அம் மதிப்புகளிலேயே இத் தொடர் வரைகோடு அமைகிறது.

எடுத்துக்காட்டு

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

பயிற்சி 3-1.

(1) $y = \cos x$ என்பதன் வரைபடத்தை அலகு வட்டத்தைப் பயன்படுத்தி வரைக. (இதுவும் sine வளைவை அமைப்பது போன்றதே.)

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ என இருக்கும்பொழுது sine வளைவை அமை. இதிலிருந்து $y = \sin x$, $y = \cos x$ என்பதன் வரை படங்களை வரைவது எவ்வாறு என்று விளக்குக.

(3) பின்வரும் வளைகோடுகளை வரைக :

(i) $y = \sin \frac{x}{2}$

(ii) $y = \cos 2x$

(iii) $y = \sin x + \cos x$

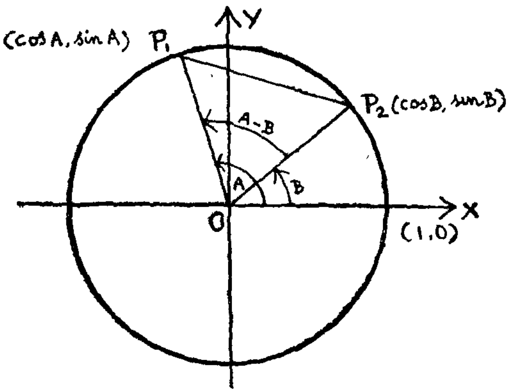
4. திரிகோணமிதி சார்புகளின் இயற்கணிதம்

4·1. கொசைன் சேர்ப்புச் சூத்திரம்

A, B என்ற கொடுக்கப்பட்ட இரு கோணங்களுக்குப் பின்வரும் சூத்திரங்கள் மெய் ஆகும்:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \dots (1)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \dots (2)$$



படம் 4-1.

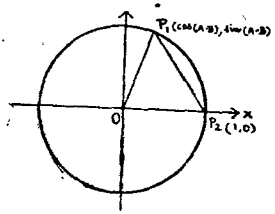
நிரூபணம்

A, B என்பது ஓர் அலகு வட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட இரு கோணங்கள் ஆகும். அவை அடிப்படைக் கோணங்கள் ஆகும்.

P_1 $(\cos A, \sin A)$ என்பது கோணம் A-ன் முடிவுப் பக்கத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியாகும். P_2 $(\cos B, \sin B)$

என்பது கோணம் B-ன் முடிவுப்பக்கத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடும் சூத்திரம் $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ என்பதை நினைவு கூர்க.



படம் 4-2.

$$P_1P_2^2 = (\cos B-\cos A)^2 + (\sin B - \sin A)^2$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 A - 2\cos B\cos A + \sin^2 B + \sin^2 A - 2\sin B\sin A$$
$$= 2-2\cos B\cos A - 2\sin B\sin A \quad ...(1)$$

P_2 (1, 0) என்று உள்ளவாறு வட்டத்தை இடச்சுற்றுகச் சுற்றிய கோணம் $-B$ ஆதலால், P_1-ன் புதிய இடம் $(A-B)$ கோணத்தின் முடிவுப் பக்கத்தில் அமையும். அதன் அச்சுத் தூரங்கள் $[\cos(A-B), \sin(A-B)]$ ஆகும்.

P_1, P_2-ன் புதிய இடங்களின் அச்சுத் தூரங்கள் முறையே (1, 0), $[\cos(A-B), \sin(A-B)]$ ஆதலால்

$$P_1P_2^2 = [1-\cos(A-B)]^2 + [0-\sin(A-B)]^2$$
$$= 1 + \cos^2(A-B) - 2\cos(A-B) + \sin^2(A-B)$$
$$= 2-2\cos(A-B) \quad ...(2)$$

P_1P_2 இவற்றிற்கிடையிலுள்ள தூரம் சுழற்சியினால் மாறுபடுவதில்லை.

(1), (2) ஆகியவற்றினின்று

$$2-2\cos(A-B) = 2-2\cos B\cos A - 2\sin B\sin A$$

$\therefore \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ என்று பெறுகிறோம்.

A, B-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் இது பொருந்தும்.

B-க்குப் பதிலாக $-B$ ஐ எடுத்துக்கொள்ள,

$$\cos(A+B) = \cos[A-(-B)]$$
$$= \cos A \cos(-B) + \sin A \sin(-B)$$
$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

கிளைத் தேற்றம்

$$\cos(A+B)\cos(A-B) = [\cos A \cos B - \sin A \sin B] \times [\cos A \cos B + \sin A \sin B]$$
$$= \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B$$
$$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B$$
$$= \cos^2 A - \cos^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \cos^2 A \sin^2 B$$
$$= \cos^2 A - \sin^2 B.$$
$$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A \sin^2 B.$$

4-2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ எனக் காண்பித்தல்.

(1) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta$$
$$= 0\cos\theta + 1.\sin\theta$$
$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \text{ ஆகும்.}$$

(2) 1 ஐப் பயன்படுத்தி

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

அல்லது $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ என நிரூபிக்கலாம்.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \text{ ஆகும்.}$$

[குறிப்பு :

$$\sin 30 = \cos 60$$
$$\cos 45 = \sin 45$$
$$\tan 60 = \cot 30]$$

4-3. சைனின் சேர்ப்புச் சூத்திரம்

கொசைனின் சேர்ப்புச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி $\sin(A+B)$, $\sin(A-B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காணலாம்.

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

மேலும், $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

என்ற சூத்திரங்களை நினைவுகூர்க.

(1) $\sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$

(2) $\sin(A-B) = \sin[A+(-B)]$

$$= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$\therefore \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

கிளைத் தேற்றம் :

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$\therefore \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$

4-4. டேன்ஜண்ட்டின் சேர்ப்புச் சூத்திரம்.

$$\tan (A+B) = \frac{\sin (A+B)}{\cos (A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \dfrac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\dfrac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \dfrac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

இதேபோல் $\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

$\cos (x-y) = 3 \cos (x+y)$ எனில்

$\cot x \cot y = 2$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$\cos (x-y) = 3 \cos (x+y)$

$\Longrightarrow \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$= 3 (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

$\Longrightarrow 2 \cos x \cos y = 4 \sin x \sin y$

$\Longrightarrow \cot x \cot y = 2.$

எடுத்துக்காட்டு 2

$\tan (\alpha - \beta) = \frac{7}{24}$; $\tan \alpha = \frac{4}{3}$;

A, B என்பன குறுங்கோணங்கள் எனில் $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{7}{24}$$

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{7}{24}$$

$$\frac{\frac{4}{3}-\tan\beta}{1+\frac{4}{3}\tan\beta} = \frac{7}{24}$$

அல்லது $\frac{4-3\tan\beta}{3+4\tan\beta} = \frac{7}{24}$

அல்லது $96 - 72\tan\beta = 21 + 28\tan\beta$

அல்லது $100\tan\beta = 75$

$$\tan\beta = \frac{3}{4}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

என்பதில் பகுதி $1-\tan\alpha\tan\beta = 1-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 0 = \tan\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}.$$

பயிற்சி 4-1.

(1) *சுருக்குக :*

(i) $\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x$

(ii) $\cos 70\cos 50 - \sin 70\sin 50$

(iii) $\sin 50\cos 30 + \cos 50\sin 30$

(iv) $\sin 2u\sin u - \cos 2u\cos u$

(v) $\sin(3x+y) - \sin(3x-y)$

(vi) $\cos(x+y) + \cos(x-y)$

(vii) $\frac{\tan(\alpha+\delta) - \tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\delta)\tan\alpha}$

(2) *பின்வரும் சூத்திரங்களைச் சரிபார்க்க :*

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cos\theta$

(ii) $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

(iii) $\cos(2\pi-\theta) = \cos\theta$

(iv) $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

(v) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

(3) (i) $\tan A + \tan B = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

(ii) $\cos(60^\circ + A)\cos(30^\circ - A) - \sin(60^\circ + A)\sin(30^\circ - A) = 0$

(iii) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

(iv) $\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\theta - \sin\theta$

என்பனவற்றை நிரூபிக்க.

(4) பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\sin A + \sin(120 + A) + \sin(240 + A) = 0$

(ii) $\cos A + \cos(240 + A) + \cos(240 - A) = 0$

(iii) $\cos A + \cos(120 + A) + \cos(120 - A) = 0$

(5) tan 15°-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(6) $\cos A = \frac{1}{7}$; $\cos B = \frac{13}{14}$ எனில் $A - B = \frac{\pi}{3}$

என நிரூபிக்க.

(7) $\sin A = \frac{8}{17}$; $\sin B = \frac{5}{13}$ எனில் $\sin(A+B) = \frac{171}{221}$

என நிரூபிக்க.

(8) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ எனில் $A + B = \frac{\pi}{4}$

என நிரூபிக்க.

(9) $\tan A = \frac{5}{6}$; $\tan B = \frac{1}{11}$ எனில் $A + B = 45^\circ$

என நிரூபிக்க.

(A, B — குறுங்கோணங்கள்.)

(10) $\sin A = \frac{3}{5}$; $\cos B = \frac{12}{13}$ எனில், $\tan (A-B) = \frac{16}{13}$ என நிரூபிக்க.

(11) $\tan A = \frac{18}{17}$; $\tan B = \frac{1}{35}$ எனில், $A-B=45^\circ$ என நிரூபிக்க.

(12) $\tan 75^\circ$ யின் மதிப்பைக் காண்க. மேலும் $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = 4$ என நிரூபிக்க.

(13) $A + B = 45^\circ$ எனில்,

(i) $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

(ii) $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$

(iii) $\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{2}-1$ என நிரூபிக்க.

(14) $\tan A + \tan B = a$; $\cot A + \cot B = b$ எனில், $\cot (A + B) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ என நிரூபிக்க.

(15) $\tan (45^\circ + A) \tan (45^\circ - A) = 1$ என நிரூபிக்க.

(16) $\cot (A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ என நிரூபிக்க.

(17) $\tan (A + B + C) = \dfrac{\Sigma \tan A - \tan A \tan B \tan C}{1 - \Sigma \tan A \tan B}$ என நிரூபிக்க.

(18) $\dfrac{\tan (A+B)}{\cot (A-B)} = \dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$ என நிரூபிக்க.

4-5. ஒத்த கோணங்களின் சுருக்கு சூத்திரங்கள்

(1) $\sin (-\theta) = -\sin \theta$

(2) $\cos (-\theta) = \cos \theta$

(3) $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$

(4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

என நாம் முன்னரே அறிந்துள்ளோம். $\sin(A \pm B)$; $\cos(A \pm B)$ என்பவற்றின் சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி $k\frac{\pi}{2} \pm \theta$ என்ற கோணத்தின் சைன், கொசைன் அளவுகளைக் காணலாம். ($k \in Z$) சைன், கொசைன் இவற்றின் சார்புகளிலிருந்து மற்ற நான்கு திரிகோண மிதி சார்புகளை நிர்ணயிக்கலாம். கீழே சூத்திரங்களின் பட்டியல் தரப்பட்டுள்ளது. (மாணவர்கள் இவற்றைச் சரிபார்க்க.)

(i) *$-\theta$ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :*

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$$

(ii) $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ *திரிகோணமிதி சார்புகள் :*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cosec}\,\theta$$

$$\text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

(iii) $\frac{\pi}{2}+\theta$-ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sec\theta$$

(iv) $\pi-\theta$-ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$$
$$\operatorname{cosec}(\pi-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$$

(v) $\pi+\theta$-ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :

$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$$
$$\operatorname{cosec}(\pi+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$$

(vi) $\frac{3\pi}{2} - \theta$-ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sec\theta$$

(vii) $\frac{3\pi}{2} + \theta$-ன் திரிகோணமிதி சார்புகள் :

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$$

$$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sec\theta$$

(viii) $2n\pi \pm \theta$ ($n \in Z$) என்ற கோணத்தின் திரிகோணமிதி சார்புகள் ஒவ்வொன்றும் $\pm\theta$ என்ற கோணத்தின் சம்பந்தப்பட்ட திரிகோணமிதி சார்புகளுக்குச் சமமாகும். (ஏனெனக் கூறுக.)

[குறிப்பு :

மேலே கண்ட எல்லாச் சூத்திரங்களையும் மனனம் செய்யவோ, ஒத்த கோணங்களின் அடிப்படைக் கோணங்களை அமைக்கவோ, அவற்றை வரையவோ வேண்டிய அவசியமில்லை. கீழ்க்கண்ட முறையைப் பயன்படுத்தினால் போதுமானது.

(1) $k\frac{\pi}{2} \pm \theta$ என்ற கோணத்தின் ($k \in Z$) ஒத்தகோணத்தின் திரிகோணமிதி சார்பு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோணத்தின் அளவினைக் கொண்டு அதன் முடிவுப் பக்கம் எந்தக் காற்பகுதியில் அமைந்துள்ளது என்பதை நாம் அறிந்து கொள்ளலாம்.

(2) கொடுக்கப்பட்ட திரிகோணமிதி சார்பின் குறியினைக் கணித்துக் கொள்க.

(3) திரிகோணமிதி சார்பின் குறியினைக் குறித்துக் கொண்டபின் கொடுத்துள்ள கோண அளவினை, k என்பது ஒற்றைப்படை எண்ணா அல்லது இரட்டைப்படை எண்ணா என்பதைக் கொண்டு நிர்ணயித்துக் கொள்ளலாம்.

k என்பது இரட்டைப்படை எண்ணானால் ஒத்த கோணங்களின் திரிகோணமிதி சார்புகள் θ என்ற சார்பிற்குச் சமமானது ஆகும்.

k ஒற்றைப் படை எண்ணானால், ஒத்த கோணங்களின் திரிகோணமிதி சார்புகள் θ-ன் கோசார்புகள் ஆகும் [சைனும் கொசைனும் கோசார்புகள் ; டேன்ஜண்ட்டும் கோடேன்ஜண்ட்டும் கோசார்புகள் ; சீகண்டும் கொசீகண்டும் கோசார்புகள்].

எடுத்துக்காட்டு

$\sin(540° + \theta)$ என்பதை θ-ன் சார்பாகக் கூறுக :

தீர்வு

(1) $540° + \theta$ என்பது மூன்றும் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது.

(2) மூன்றாவது கால் பகுதியில் சைனின் மதிப்பு குறை எண்ணாகும்.

(3) $540°+\theta = 6\,(90°)+\theta$. $k\ (=6)$ என்பது இரட்டைப் படை எண்ணாகும்.

எடுத்துக்காட்டு

cos 300° என்பதன் மதிப்பைக் காண்க.

(1) 300°-ன் முடிவுப்பக்கம் 4ஆவது கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது. (2) நான்காவது கால்பகுதியில் கோசைன் குறை எண்ணாகும். (3) $300° = 3 . 90°+30°$. $k = 3$ ஒற்றைப் படை எண்ணாகும்.

$$\therefore \cos 300 = \cos (3 . 90°+30°) = +\sin 30° = \tfrac{1}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு

$\sin 600° . \cos 330° + \cos 120° \sin 150°$. இதன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு

$$\sin 600° = \sin 240°$$

$$= \sin (180°+60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 330° = \cos (360°-30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos (90°+30°) = -\sin 30° = -\tfrac{1}{2}$$

$$\sin 150° = \sin (180°-30°) = \sin 30° = \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \sin 600° . \cos 330° + \cos 120° \sin 150°$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} = -1$$

பயிற்சி 4 - 2.

1. கீழ்க்கண்டவற்றை 45°-க்குக் குறைந்த கோணங்களின் திரிகோணமிதி சார்புகளாகக் கூறுக.

(i) $\sin 2050°$

(ii) $\tan (-500°)$

(iii) $\operatorname{cosec} 750°$

(iv) $\cos 923°$

2. சுருக்குக

(i) $$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos(\pi-A)\tan(\pi+A)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+A\right)\sin(\pi-A)\tan(\pi-A)}$$

(ii) $$\frac{\cos(90°+\theta)\sec(-\theta)\tan(180°-\theta)}{\sec(360°-\theta)\sin(180°+\theta)\cot(90°-\theta)}$$

(iii) $$\frac{\sin 300° \tan 330° \sec(-420°)}{\cot 135° \cos 210° \operatorname{cosec} 315°}$$

4·6. கோணங்களின் மடங்குகள்

(i) $$\sin 2A = \sin(A+A)$$

$$= \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A.$$

மேலும் $$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= 2 \tan A \cos^2 A$$

$$= 2 \tan A \frac{1}{\sec^2 A}$$

$$\therefore \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1+\tan^2 A}$$

(ii) $\cos 2A = \cos(A+A)$

$= \cos A \cos A - \sin A \sin A$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

மேலும் $\cos 2A = \cos^2 A-(1-\cos^2 A)$

$\therefore \cos 2A = 2\cos^2 A-1$

$= 2(1-\sin^2 A)-1$

$\therefore \cos 2A = 1-2\sin^2 A$

மேலும் $\cos 2A = \dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A} = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

எனவும் பெறலாம்.

கிளைத் தேற்றங்கள்

(1) $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

(2) $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

(3) $\tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

(iii) $\tan 2A = \tan(A+A)$

$$= \frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan B}$$

$$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

எடுத்துக்காட்டு

$\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1} = \dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}$ எனக் காட்டுக.

தீர்வு

$$\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1} = \frac{\dfrac{1}{\cos 8A}-1}{\dfrac{1}{\cos 4A}-1}$$

$$= \frac{1-\cos 8A}{\cos 8A} \cdot \frac{\cos 4A}{1-\cos 4A}$$

$$= \frac{2\sin^2 4A}{\cos 8A} \cdot \frac{\cos 4A}{2\sin^2 2A}$$

$$= \frac{\sin 8A}{\cos 8A} \cdot \frac{2\sin 2A.\cos 2A}{2\sin^2 2A}$$

$$= \frac{\sin 8A}{\cos 8A} \cdot \frac{\cos 2A}{\sin 2A}$$

$$= \frac{\tan 8A}{\tan 2A}$$

எடுத்துக்காட்டு

$\tan^2\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{a}{b}$ எனில்,

$\sin\phi = \frac{a-b}{a+b}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$$45^\circ + \frac{\phi}{2} = \theta ; \frac{a}{b} = \tan^2\theta$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

(அ-து.) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$

$$= \frac{-[\cos^2\theta - \sin^2\theta]}{1}$$

$$= -[\cos 2\theta]$$

$$= -\cos 2\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$= -\cos(90^\circ + \phi)$$

$$= \sin\phi$$

4-7. கோணங்களின் மும்மடங்குகள்

(i) $\sin 3A = \sin(2A + A)$

$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$

$= 2 \sin A \cos A \cos A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A$

$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$

$\therefore \quad \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos(2A + A)$

$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$

$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A \sin A$

$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A$

$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(iii) $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \tan A}$$

$$\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$$

எடுத்துக்காட்டு

$4 \sin A \sin(60° - A) \sin(60° + A) = \sin 3A$

என நிரூபிக்க.

தீர்வு

$4 \sin A \sin(60° - A) \sin(60° + A)$

$= 4 \sin A [\sin^2 60° - \sin^2 A]$

$$= 4 \sin A \left[\tfrac{3}{4} - \sin^2 A\right]$$
$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A$$
$$= \sin 3A$$

4-8. 18, 36-ன் திரிகோணமிதி விகிதங்கள்

(i) $\theta = 18^\circ$ என்றால்

$$5\theta = 90^\circ$$
$$\therefore 2\theta = 90^\circ - 3\theta$$
$$\sin 2\theta = \sin(90 - 3\theta) = \cos 3\theta$$

(அ-து.) $2 \sin\theta \cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$$
$$= 4(1 - \sin^2\theta) - 3$$

(அ-து.) $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4.4}}{2.4}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2.4}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$\theta = 18^\circ$ எனவே, $\sin\theta$-ன் மதிப்பு ஒரு குறை எண்ணாக இருக்க முடியாது.

$$\sin\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$
$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

(ii) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18$$
$$= 1 - 2\left[\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right]^2$$

$$= 1 - \frac{2(5 + 1 - 2\sqrt{5})}{16}$$

$$= \frac{16 - 12 + 4\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{4(1 + \sqrt{5})}{16}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

4-9. பின்னக் கோணங்கள்

$$\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$$

$\theta = \frac{A}{2}$ என்க.

$$\therefore \sin A = 2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2} \quad \ldots(1)$$

இதுபோலவே $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ ...(2)

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} \quad \ldots(3)$$

$= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$ என்றும், ...(4)

$\tan A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}}$ என்றும் பெறலாம். ...(5)

மேலும்,

$\sin A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}$ என்றும், ...(6)

$\cos A = \dfrac{1 - \tan^2\frac{A}{2}}{1 + \tan^2\frac{A}{2}}$ என்றும் காணலாம்....(7)

(3), (4) இவற்றிலிருந்து

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} \quad \ldots(8)$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} \qquad \ldots(9)$$

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \qquad \ldots(10)$$

என்று பெறலாம்.

(10)-லிருந்து

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

$$= \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \cdot \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{(1 - \cos A)^2}{1 - \cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1 - \cos A}{\sin A}\right)^2$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \qquad \ldots(11)$$

மேலும்,

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} \qquad \ldots(12)$$

என்றும் காணலாம்.

பயிற்சி 4-3.

கீழ்க்கண்டவற்றின் மதிப்பைக் காண்க :

(1) (i) $2 \sin 15° \cos 15°$

(ii) $1 - 2 \sin^2 22° \cdot 5$

(iii) $2 \cos^2 15° - 1$

(iv) $\cos^2 22° \cdot 5 - \sin^2 22° . 5$

(v) $\dfrac{2 \tan 15°}{1 - \tan^2 15°}$

(vi) $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{2}}$

(vii) $\dfrac{\sqrt{1-\cos 300^\circ}}{2}$

(viii) $4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ$

(ix) $3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

(2) கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\cos 22^\circ{\cdot}5 = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(ii) $\sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

(3) பின் வருவனவற்றை ஒற்றை உறுப்பாகச் சுருக்குக:

(i) $1 - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(ii) $2\sin\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 3\alpha}{1+\cos 3\alpha}}$

(iv) $\dfrac{\sin 8y}{1-\cos 8y}$

(4) $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha > 0$ என்றால், $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ இவற்றைக் காண்க.

(5) $\tan\theta = -\frac{1}{5}$ என்றால் $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\tan 2\theta$ இவற்றைக் காண்க. (θ-இரண்டாம் கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது எனக் கொள்க.)

(6) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; $\cos x = \frac{-3}{5}$ என்றால், $\cos 2x$, $\cos \frac{x}{2}$ இவற்றின் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

(7) *கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க:*

(i) $\frac{\sin A + \sin 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \tan A$

(ii) $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cot A$

(iii) $\frac{1 - \cos 2A + \sin 2A}{1 - \cos 2A + \sin 2A} = \tan A$

(iv) $\cot A - \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A$

(v) $\tan A + \cot A = 2 \operatorname{cosec} 2A$

(8) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ என்றால், $\sin 2\theta$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(9) $\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \frac{1}{8}$ என்று காட்டுக.

(10) *கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க:*

(i) $\tan^2 (45 + A) = \frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A}$

(ii) $\sin (45° + A) \sin (45° - A) = \frac{1}{2} \cos 2A$

(11) $\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4$ என்று காட்டுக.

(12) $\cos^2 A + \cos^2 (120° + A) + \cos^2 (120° - A) = \frac{3}{2}$ என்று நிறுவுக.

(13) $\tan \alpha = t$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

(i) $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$; $\cos 2\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

(ii) $\sin 2\alpha + \tan 2\alpha = \frac{4t}{(1 - t^2)^2}$

(14) $\tan A = \dfrac{1-\cos B}{\sin B}$ எனில், $\tan 2A = \tan B$ என நிரூபிக்க.

(15) $2 \tan \alpha = 3 \tan \beta$ என்றால்,

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin 2\beta}{5 - \cos 2\beta}$$ என்று காட்டுக.

(16) $\tan \theta = \frac{1}{7}$; $\tan \phi = \frac{1}{3}$ எனில்

$\cos 2\theta = \sin 4\phi$ என நிரூபிக்க.

(17) $\tan A = \frac{1}{3}$; $\tan B = \frac{1}{7}$ எனில்

$2A + B = \dfrac{\pi}{4}$ எனக் காட்டுக.

(18) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}\right) \quad \sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}$ எனக் காட்டுக.

(19) $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 3(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ)$ எனக் காட்டுக.

(20) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A} = 2$ எனக் காட்டுக.

(21) $\theta \cos = \frac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$ எனில்,

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right); \ \cos 3\theta = \tfrac{1}{2}\left(t^3 + \frac{1}{t^3}\right)$$

(22) $\dfrac{\sin 3\theta}{1 + 2\cos 2\theta} = \sin\theta$ என நிரூபித்து $\sin 15^\circ$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(23) $\tan 82\frac{1}{2}^\circ = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + 1}$ என நிரூபிக்க.

(24) $4 \sin A \sin(60^\circ - A) \sin(60^\circ + A) = \sin 3A$ என நிரூபிக்க.

25. பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\sin^2 18° + \cos^2 36° = \frac{3}{4}$

(ii) $4 \sin 18° . \cos 36° = 1$

4-10. திரிகோணமிதி சார்புகளின் சேர்ப்புகளும் மடங்குகளும்

திரிகோணமிதி சார்புகளை அவற்றின் கூடுதல் அல்லது வித்தியாசத்தின் மூலமாகக் கூறுவது எவ்வாறு என்று காண்போம்.

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \ldots(1)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \ldots(2)$$

என்பதை நினைவு கூறுக.

(1) + (2) :

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B \quad \ldots(3)$$

(1) − (2) :

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B \quad \ldots(4)$$

இதேபோல்

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \ldots(5)$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \ldots(6)$$

(5) + (6) :

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad \ldots(7)$$

(5) − (6) :

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B \quad \ldots(8)$$

(3), (4), (7), (8) என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து பின் வருவனவற்றை நாம் அறியலாம் :

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B) \quad \ldots(3)'$$

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B) \quad \ldots(4)'$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad \ldots(5)$$

$$-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$$

அல்லது $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \ldots(6)$

(3), (4), (7), (8) என்ற சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி 2 திரிகோணமிதி சார்புகளின் சேர்ப்பு அல்லது வித்தியாசத்தை அவற்றின் பெருக்குப் பலனாகவும் எழுதலாம்.

$A + B = C; \quad A - B = D$ எனில்,

$$A = \frac{C+D}{2}; \quad B = \frac{C-D}{2}.$$

மேலே கண்ட நான்கு சமன்பாடுகளில் இவற்றைப் பிரதியிட

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \ldots(9)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \ldots(10)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad \ldots(11)$$

$$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$ அல்லது

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad \ldots(12)$$

எனக் கிடைக்கப் பெறுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு

$$2\sin(45° + A)\cos(45° + B) = \cos(A+B) + \sin(A-B)$$

என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$2\sin\theta\cos\phi = \sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)$$

$\theta = (45° + A); \quad \phi = (45° + B)$ ஆகும்.

$$2\sin(45°+A)\cos(45°+B)$$
$$= \sin[90° + (A+B)] + \sin(A-B)$$
$$= \cos(A+B) + \sin(A-B)$$

எடுத்துக்காட்டு

sin 20° sin 40° sin 60° sin 80° = $\frac{3}{16}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B)$$

$$2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ = \cos 20^\circ - \cos 60^\circ$$

$$= \cos 20^\circ - \tfrac{1}{2}$$

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ = \tfrac{1}{2} \cos 20^\circ - \tfrac{1}{4}$$

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 80^\circ \cos 20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \tfrac{1}{2} \left[\sin 100^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] - \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \left[\sin 100^\circ - \sin 80^\circ \right] + \frac{3}{16}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} . 2 \cos 90^\circ \sin 10^\circ + \frac{3}{16} = \frac{3}{16}$$

4-11. நிபந்தனைக்குட்பட்ட சமன்பாடு

ΔABC-ல் $A + B + C = 180^\circ$. இதனின்று பின்வரும் மெய்க் கூற்றுகளை அறியப்பெறுகின்றோம்:

(i) $\sin (A+B) = \sin (180^\circ - C) = \sin C$

(ii) $\cos (A+B) = \cos (180^\circ - C) = -\cos C$

(iii) $\tan (A+B) = \tan (180^\circ - C) = -\tan C$

(iv) $\sin \left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cos \frac{c}{2}$

(v) $\cos \left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos \left(90^\circ - \frac{c}{2}\right) = \sin \frac{c}{2}$

(vi) $\tan \left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan \left(90^\circ - \frac{c}{2}\right) = \cot \frac{c}{2}$

எடுத்துக்காட்டு 1

$$A + B + C = \pi \text{ எனில்}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

$$= 2 \sin (A + B) \cos (A - B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\left[\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) . \cos\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right); \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta\right]$$

$$= 2 \sin C \cos (A - B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin C [\cos (A - B) + \cos C]$$

$$= 2 \sin C [\cos (A - B) - \cos (A + B)] \quad (\because A + B + C = \pi)$$

$$= 2 \sin C [2 \sin A \; 2 \sin B]$$

$$= 4 \sin A \sin B \sin C.$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$\triangle ABC$-ல் $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}$$

$$\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1 + \cos C}{2}$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} [\cos A + \cos B - \cos C]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos C\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - (1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= \sin\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

பயிற்சி 4-4.

(1) கோணங்களின் சேர்ப்பு அல்லது வித்தியாசமாகக் கூறுக :

(i) $2 \sin 5x \cos 3x$

(ii) $\cos 6x \sin 3x$

(iii) $2 \cos \frac{5\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$

(iv) $\sin 75° \sin 15°$

(v) $2 \cos 4\theta \cos 7\theta$

(vi) $\sin 45° \cos 15°$

(vii) $\sin 45° \sin 15°$

(viii) $\sin 2x \cos 6x$.

(2) திரிகோணமிதி சார்புகளின் பெருக்கற் பலனாகக் கூறுக :

(i) $\sin 60° + \sin 30°$

(ii) $\sin 46^\circ - \sin 16^\circ$

(iii) $\sin 10\theta + \sin 6\theta$

(iv) $\sin 3\theta - \sin \theta$

(v) $\cos 6x + \cos 2x$

(vi) $\cos 10\theta - \cos 4\theta$

(vii) $\sin(x + 4x) - \cos x$

(viii) $\cos(x + 4x) - \cos x$

(ix) $\cos 40^\circ - \sin 60^\circ$

(3) நிரூபிக்க.

(i) $\cos 10^\circ + \cos 70^\circ = \sqrt{3}\cos 40^\circ$

(ii) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $\frac{\sin 13^\circ + \sin 7^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 3^\circ}{\cos 10^\circ}$

(iv) $\sin 80^\circ = \sin 40^\circ + \cos 70^\circ$

(4) அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாமல நிரூபிக்க.

(i) $\cos 35^\circ + \cos 85^\circ + \cos 155^\circ = 0$

(ii) $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$

(iii) $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0$

(5) நிரூபிக்க.

$$\frac{2\cos 2A + 1}{2\cos 2A - 1} = \tan(60^\circ + A)\tan(60^\circ - A)$$

(6) நிரூபிக்க.

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(7) நிரூபிக்க.

(i) $\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\cos 2A + \cos 2B} = \tan (A - B)$

(ii) $\frac{\cos v - \cos u}{\sin u - \sin v} = \tan \frac{u + v}{2}$

(iii) $\cos 3A + \cos 5A + \cos 7A + \cos 14A$
$= 4 \cos 4A \cos 5A \cos 6A$

(8) நிரூபிக்க.

(i) $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$
$= 4 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}$

(ii) $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$
$= 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$

(9) நிரூபிக்க .

$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta + \gamma)$

$$= 4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

(10) $\sin x + \sin y = a$, $\cos x + \cos y = b$ எனில், $\tan^2 \left(\frac{x - y}{2}\right)$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

(11) $A + B + C = \pi$; $\cos A = \cos B \cos C$ எனில் $\tan B + \tan C = \tan A$ என நிரூபிக்க.

(12) $A + B + C = 180°$ எனில்,

$\sin (B + C - A) + \sin (C + A - B) + \sin (A + B - C)$
$= 4 \sin A \sin B \sin C$ என்று நிரூபிக்க.

(13) $A + B + C = 180°$ எனில், பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$

(ii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$
$= -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

(iii) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C$
$= 1 - 4 \sin A \sin B \cos C$

(14) $\triangle ABC$-ல் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

(ii) $\cos A + \cos B + \cos C$
$= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(iii) $\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C}$
$= 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(15) $\triangle ABC$-யில் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(ii) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

(iii) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

(16) நிரூபிக்க :

$A + B + C = 180°$ எனில், $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$
$= -4 \cos \frac{3A}{2} \cos \frac{3B}{2} \cos \frac{3C}{2}$

5. திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள்

5-1. முன்னுரை

திரிகோணமிதி சார்பை உள்ளடக்கிய சமன்பாடு திரிகோண மிதி சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

(i) $\cos x = \frac{1}{2}$.

(ii) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

இவை $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ போன்ற முற்றொருமைகளிலிருந்து முற்றிலும் மாறுபட்டவை ஆகும். இவை x-ன் எம்மதிப்பிற்கும் உண்மை வாக்கியங்களாக அமையும். ஆனால் திரிகோணமிதி சமன்பாடுகள் x குறிப்பிட்ட சில மதிப்புகளுக்கு மட்டும்தான் மெய் வாக்கியத்தைத் தரும். மேலும், சில திரிகோணமிதி சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் இல்லாமல் அமையவும் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$\sin x = 5$. இச் சமன்பாட்டிற்குத் தீர்வு கிடையாது. (ஏன் எனக் கூறுக.)

எடுத்துக்காட்டு 3

$\cos x = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$x = \frac{\pi}{3}$ அல்லது $x = \frac{5\pi}{3}$ ஆக இருக்கும் பொழுது $\cos x = \frac{1}{2}$ என இருக்கும்.

$\cos x$ என்பது 2π-ஐ சுழற்சியாகக் கொண்ட ஒரு சீர் சுழற் சார்பாகும்; எனவே மேலே கண்ட x-ன் மதிப்புகளுடன் 2π-ன் முழு எண் மடங்குகளைக் கூட்ட வரும் மதிப்புகளும் இச் சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணத்தின் உறுப்புகளாக இருக்கும்.

பொதுவாக $x = \frac{\pi}{3} + n.\ 2\pi$

$$x = \frac{5\pi}{3} + n.\ 2\pi;\ n \in Z$$

என்பது மேலேகண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகும்.

பாகை அலகுகளாக நமக்குத் தீர்வுக்கணம் தேவையிருப்பின் π–க்குப் பதிலாக $180°$ எனப் பிரதியிட வேண்டும்.

$$x = 60° + n.\ 360°;\ x = 300° + n.\ 360°$$

[குறிப்பு :

x பல மதிப்புகளைக் கொண்டது. அவற்றில் x-ன் மிகச் சிறிய எண் மதிப்புகு$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 'முக்கிய மதிப்பு' என்று கொள்ளப்படும்.]

5-2. *திரிகோணமிதி விகிதங்கள் பூஜ்யங்களாக உள்ள கோணங்களின் பொதுக்கோவை*

(i) $\sin\theta = 0$ எனில்

$$\theta = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots\ldots$$

அதாவது $\theta = n\pi;\ \ n \in Z$ ஆகும்.

(ii) $\cos\theta = 0$ எனில்

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \ldots\ldots$$ ஆகும்.

அதாவது $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2};\ \ n \in Z$ ஆகும்.

(iii) $\tan\theta = 0$ எனில்

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$$

அல்லது $\sin\theta = 0$

அல்லது $\theta = n\pi;\ \ n \in Z.$

[குறிப்பு :

$\sin\theta = k$ அல்லது $\tan\theta = k$ என்ற வகையில் அமைந்த சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் பொழுது முக்கிய மதிப்பு $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

என்ற இடைவெளியில் அமைந்திருக்கும். $\cos\theta = k$ என்ற வகையில் அமைந்த சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும்பொழுது அது $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்திருக்கும்.]

5-3. $\sin\theta = \sin\alpha$; $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ என்பதன் தீர்வுக் கணம் காணுதல்.

$$\sin\theta = \sin\alpha$$

$$\Longrightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$\Longrightarrow 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2} . \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0 \text{ அல்லது } \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ எனில், $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

$$\theta = (2n+1)\pi - \alpha \qquad \ldots(1)$$

$$= m\pi - \alpha \; (m \text{ ஓர் ஒற்றைப்படை முழு})$$

$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ எனில், $\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$ அல்லது

$$\theta = 2n\pi + \alpha \qquad \ldots(2)$$

$$= m\pi - \alpha \; (m \text{ ஓர் இரட்டை முழு})$$

(1) ; (2) இவற்றிலிருந்து $\sin\theta = \sin\alpha$ என்பதின் பொதுத் தீர்வு $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$; $n \in Z$ என்று தெரியவருகின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ எனில்

$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}$; $n \in Z$ என்பதே தீர்வுக்கணத்தின் உறுப்புகளாகும்.

5-4. $\cos\theta = \cos\alpha\ ;\ 0 \le \alpha \le \pi$ ***என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் காணுதல்***

$\cos\theta = \cos\alpha$

$\Longrightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$\Longrightarrow -2\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$ அல்லது $\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0$ எனில் $\dfrac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$

அல்லது $\theta = 2n\pi - \alpha$ ஆகும். ....(1)

$\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$ எனில் $\dfrac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$

அல்லது $\theta = 2n\pi + \alpha$ ஆகும். ...(2)

(1), (2)-லிருந்து $\cos\theta = \cos\alpha$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் கிடைக்கும்.

அதாவது $\theta = 2n\pi \pm \alpha\ ;\ n \in Z$ ஆகும்.

(எ-டு.) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ எனில்

$\theta = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}\ ;\ n \in Z$

5-5. $\tan\theta = \tan\alpha\ ;\ -\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ ***என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக் கணம் காணுதல்.***

$\tan\theta = \tan\alpha$

$\Longrightarrow \tan\theta - \tan\alpha = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0$

$\Longrightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0$

$\Longrightarrow \theta - \alpha = n\pi$

$\Longrightarrow \theta = n\pi + \alpha;\ n \in Z$

எடுத்துக்காட்டாக $\tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$ எனில்

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4};\ n \in Z \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

$\Longrightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$\Longrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ அல்லது $\cos\theta = 1$

$\Longrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ அல்லது $\cos\theta = \cos 0°$

$\Longrightarrow \theta$—வின் முக்கிய மதிப்பு $\frac{\pi}{3}$ அல்லது 0

$\Longrightarrow \theta$-வின் பொது மதிப்புகள்

$$2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ அல்லது } 2n\pi : n \in Z \text{ ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டு 2

$0 \le \theta \le \pi$ என்ற இடைவெளியில் $\cos 4\theta = \frac{1}{2}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கிசைந்த θ-வின் எல்லா மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு :

$4\theta = x$ எனக் கொள்க.

$\cos x = \frac{1}{2};\ 0 \le x \le 4\pi$ என்ற சமன்பாட்டினைத் தீர்ப்போம்.

$\cos x = \frac{1}{2}$ என்றால்

$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\ ;\ n \in Z \text{ ஆகும்.}$$

$x = \frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{11\pi}{3}$ என்பவையே 0-வி லிருந்து 4 π-க்கிடையில் அமைந்த x-ன் மதிப்புகளாகும்.

ஆனால் $x = 4\theta$. எனவே $\theta = \frac{x}{4}$ ஆகும்.

$\therefore \theta = \frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{7\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12}$ என்பவையே தேவையான θ-வின் மதிப்புகளாகும்.

இவை $0 \leq \theta \leq \pi$ என்ற இடைவெளியில் அமைந்துள்ளன என்பதைக் கவனிக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3

$\tan\theta + \cot\theta = 2$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

தீர்வு :

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$$

$$\Longrightarrow \tan^2\theta + 1 = 2\tan\theta$$

$$\Longrightarrow (\tan\theta - 1)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \tan\theta = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \theta = n\pi + \frac{\pi}{4};\ n \in Z.$$

எடுத்துக்காட்டு 4

தீர்க்க : $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan 2\theta\tan\theta = \sqrt{3}$

தீர்வு :

$$\tan\theta + \tan 2\theta = \sqrt{3}(1 - \tan 2\theta\tan\theta)$$

$$\Longrightarrow \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \tan(\theta + 3\theta) = \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow 3\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{9};\quad n \in Z.$$

எடுத்துக்காட்டு 5

தீர்க்க : $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2.$

தீர்வு :

$$2\sin^2\theta + \sin^2\theta = 2$$

$$\Longrightarrow \sin^2 2\theta = 2(1 - \sin^2\theta)$$

$$\Longrightarrow (2\sin\theta\cos\theta)^2 = 2\cos^2\theta$$

$$\Longrightarrow 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\cos^2\theta = 0$$

$$\Longrightarrow 2\cos^2\theta(2\sin^2\theta - 1) = 0$$

$\Longrightarrow \cos^2\theta = 0$ அல்லது $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \cos^2\theta = \cos^2\frac{\pi}{2}$ அல்லது

$$\sin^2\theta = \sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2};\quad \cos\theta = -\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4};\quad \sin\theta = -\sin\frac{\pi}{4}$$

$\Longrightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ அல்லது

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4};\quad n \in Z.$$

5–6. $a \cos\theta + b \sin\theta = c$; $c = a^2 + b^2$ **என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம் காணுதல்**

$a \cos\theta + b \sin\theta = c$ ...(1)

$\sqrt{a^2 + b^2}$ ஆல் இருபுறங்களிலும் வகுக்க

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ...(2)

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

α என்பது மிகச் சிறியது எனக் கொள்க.

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றிலிருந்து α-வின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(2)-லிருந்து $\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

அல்லது $\cos(\theta - \alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\cos\beta = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என இருக்குமாறு அமைந்த மிகச் சிறிய மிகை எண் β எனக் கொள்க.

$$\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

a, b, c என்பன நமக்குத் தெரியும்.

$\cos(\theta - \alpha) = \cos\beta$

அல்லது $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$

அல்லது $\theta = 2n\pi + \alpha \pm \beta$; $n \in Z$ என β-வின் மதிப்பைத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

தீர்க்க: $\sqrt{3} + \cot\theta = \sqrt{2} \operatorname{cosec}\theta$

தீர்வு :

$$\sqrt{3} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}$$

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}.$$

சமன்பாட்டின் இருபுறங்களையும் $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ ஆல் வகுக்க நமக்குக் கிடைப்பது

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(அ-து.) $\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

அதாவது $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$$

(அ-து.) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{3\pi}{4};\ n \in Z.$

பயிற்சி 5-1.

(1) பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க :

(i) $\sin\theta = 1,\ \theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos\theta = 1,\ \theta = 2n\pi$

(iii) $\sin\theta = -1, \theta = (4n-1)\frac{\pi}{2}$

(iv) $\cos\theta = -1, \theta = (2n+1)\pi$

(v) $\cot\theta = 0, \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

(2) x-ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

(i) $\sin x = \frac{1}{4}$

(ii) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan^2 x = 1$

(3) $\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$ எனில்

$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ என்பதை நிரூபிக்க.

(4) பின்வருவனவற்றைத் தீர்க்க.

(i) $\sin \theta = -\sin \alpha$

(ii) $\cos \theta + \cos \alpha = 0$

(iii) $\tan \theta = -\tan \alpha$

(5) $\tan^2 \theta = \tan^2 \alpha$ எனில்,

$\theta = n\pi \pm \alpha$ என்பதை நிரூபிக்க.

(6) தீர்க்க.

(i) $2 \sin^2 \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 1 = 0$

(ii) $7 \sin^2 \theta + 3 \cot^2 \theta = 4$

(iii) $\sin \theta = 1 - 2 \cos^2 \theta$

(iv) $\cos 3\theta + \cos \theta = 2 \cos 2\theta$

(v) $\cot \theta + \tan \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$

(7) $\sec \theta - 1 = (\sqrt{2} - 1) \tan \theta$ எனில்,

$\theta = n\pi$ அல்லது $n\pi + \frac{\pi}{4}$ என்பதை நிரூபிக்க.

(8) $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ எனில்,

$\theta = \frac{n\pi}{2}$ அல்லது $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ என்பதை நிரூபிக்க.

(9) $\cos 2\theta - \sin \theta = 0$; $0 \leq \theta \leq 360°$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுக்கணம் 36°, 150°, 270° என்பதை நிரூபிக்க.

(10) தீர்க்க.

(i) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$

(ii) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

(iii) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(iv) $\sin 2x + \cos 2x = 1$

(v) $\tan\theta + \sec\theta = \sqrt{3}$

(11) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ என்பதைத் தீர்க்க.

(12) $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$ எனில்,

$$\theta = 2n\pi = \frac{\pi}{2}$$

அல்லது $\theta = \frac{2n\pi}{5} \pm \frac{\pi}{10}$

என்பதை நிரூபிக்க.

(13) $\tan 3\theta + \tan\theta = 2\tan\theta$ எனில்,

$\theta = n\pi$ அல்லது $\frac{n\pi}{2}$ என்பதை நிரூபிக்க.

6. செங்கோண முக்கோணங்கள்

6-1. *முன்னுரை*

ஒரு கோணத்தின் பக்கங்களும், கோணங்களும், முக்கோணத்தின் பாகங்கள் என வழங்கப்படும். $\Delta\, ABC$-ன் கோணங்கள் A, B, C எனவும் அவற்றின் எதிர்ப்பக்க அளவுகள் a, b, c எனவும் பொதுவாகக் குறிக்கப்படுகின்றன. இவ்வளவுகளில் போதுமான சில அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டால் மற்றவற்றைக் காண இயலும். ஒரு முக்கோணத்தின் தீர்வைக் காணுதல் என்பது அறியப்படாத கோணங்களையும் பக்கங்களையும் காணுதல் என்று பொருள் படும்.

பித்தாகரஸ் தேற்றத்தையும், திரிகோணமிதி சார்புகளையும் பயன்படுத்திச் செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வை எளிதாகக் காணலாம்.

6-2. *செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வைக் காணுதல்*

பின்வரும் முறைகளைக் கையாண்டு நாம் செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வைக் காண்கிறோம்:

(i) ஒரு முக்கோணத்தில் கொடுத்துள்ள அளவுகளைக் குறிக்க.

(ii) கொடுத்துள்ள பாகங்களை வட்டமிட்டுக் குறிக்க.

(iii) தெரியாத பாகங்களைக் காணத் தேவையான சூத்திரங்களைத் தெரிந்த அளவைக் கொண்டு எழுதுக.

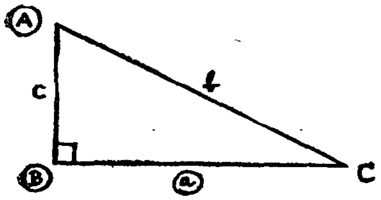
(iv) கணித அட்டவணையைப் பயன்படுத்தித் தீர்வைக் காண்க.

இம் முறை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு

$a = 79{\cdot}30;\quad \angle A = 50^\circ\, 30';\quad \angle B = 90^\circ$

$\Delta\, ABC$-யின் தீர்வைக் காண்க.



படம் 6-1.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்டது;
$a, \angle A, \angle B.$
காணவேண்டியது $b, c, \angle C$

(i) $\angle C = 90° - \angle A$
$= 90° - 50° \; 30'$
$= 39° \; 30'$

(ii) $\sin A = \frac{a}{b}$

அல்லது, $b = \frac{a}{\sin A}$

$\log b = \log a - \log \sin A$
$= \log 79{\cdot}30 - \log \sin 50° \; 30'$
$= 1{\cdot}8993 - \bar{1}{\cdot}8874$
$= 2{\cdot}0119$
$b = 2{\cdot}0119$-ன் எதிர் மடக்கை
$= 102{\cdot}8$

(iii) $\tan A = \frac{a}{c}$

அல்லது $c = \frac{a}{\tan A}$

$\log c = \log a - \log \tan a$
$= \log 79{\cdot}30 - \log \tan 50° \; 30'$
$= 1{\cdot}8993 - 0{\cdot}0839$
$= 1{\cdot}8154$
$= 1{\cdot}8154$-ன் எதிர் மடக்கை
$= 65{\cdot}37$

6·3. பயன்கள்

கட்டடங்கள், மலைகள் போன்றவற்றின் உயரங்களையும், அவை அமையப்பெற்ற தூரங்களையும் காண முக்கோணங்களின்

தீர்வு காணுதல் பயன்படுத்தப்படுகிறது. நில அளவை, கப்பல், விமானம் ஓட்டுதல் போன்றவற்றில் இத்தகைய தீர்வுகள் வேண்டப்பெறும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு ஆகாய விமானம் 150 பாகையில் 200 கி. மீ. பயணம் செய்கிறது. புறப்பட்ட இடத்தினின்று கிழக்கே எவ்வளவு தூரத்திலும் தெற்கே எவ்வளவு தூரத்திலும் அது இருக்கும் எனக் காண்க.

[குறிப்பு :

ஒரு குறிப்பிட்ட திசைப் பயணத்தைப் பாதை எனக் கூறுகிறோம். A-யிலிருந்து B-க்கான திசையை A, B-யின் வடக்காகக் கணக்கிடும் இடச்சுற்றுத் திசையில் கோண அளவுகளாகக் கொடுக்கலாம். மாலுமிகள் இவற்றைக் கிழக்கு அல்லது மேற்கு அல்லது வடக்கு அல்லது தெற்கு என்ற திசைக் கோணங்களில் குறிப்பிடுவார்கள். மேலே கண்ட கணக்கில் A-யிலிருந்து B-யின் கோணம் S 30° E ஆகும். அதாவது கிழக்கு தெற்காக 30° ஆகும்.]

தீர்வு:

படத்தில் A ஆரம்பப்புள்ளி;
B–முடிவுப் புள்ளி.
AC-கிழக்குத்திசையில் தூரம்,
CB-தெற்குத்திசையில் தூரம்

$$\angle BAC = 60^\circ$$

$$\frac{AC}{AB} = \cos 60^\circ$$

$$\therefore AC = AB \cos 60^\circ$$

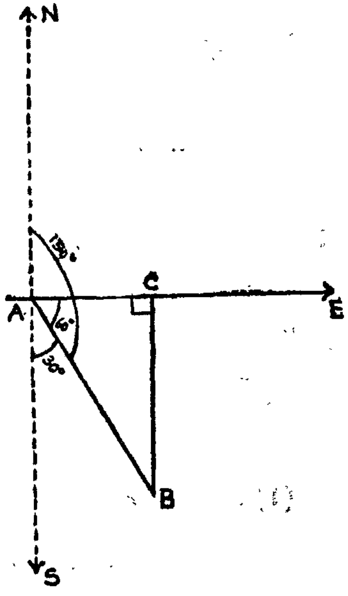
$$= 200 \times \frac{1}{2} = 100 \text{ கி.மீ.}$$

இதேபோல் $CB = AB \sin 60^\circ$

$$= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 100 \times 1{\cdot}732$$

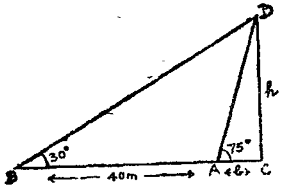
$$= 173{\cdot}2 \text{ கி.மீ.}$$



படம் 8-2.

எடுத்துக்காட்டு 2

ஓர் ஆற்றின் ஒரு கரையில் நிற்கும் ஒருவன் எதிர்க்கரையில் உள்ள ஒரு மரத்தின் உச்சியை 75° கோணத்தில் காண்கிறான். கரைக்குச் செங்குத்தாக 40 மீட்டர்கள் நடந்தவுடன் அது 30°யில் இருக்கக் காண்கிறான். மரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.



படம் 6-8

தீர்வு:

மரத்தின் உயரம் : h மீட்டர்கள் என்க.

ஆற்றின் அகலம் : b மீட்டர்கள் என்க.

படத்தில் $\tan 75^\circ = \frac{h}{b}$

$= 3{\cdot}7321$

$h = 3{\cdot}7321\,b$ ...(1)

மேலும் $\frac{h}{b+40} = \tan 30$

$= 0{\cdot}5774$

$\therefore\ h = (b+40)\,0{\cdot}5774$

$= 0{\cdot}5774\,b + 23.096$ ...(2)

(1), (2) ஆகியவற்றினின்று

$3{\cdot}7321\,b = 0{\cdot}5774\,b + 23{\cdot}096$

$\therefore\ (3{\cdot}7321 - 0{\cdot}5774)\,b = 23{\cdot}096$

$3{\cdot}1547\,b = 23{\cdot}096$

$b = \frac{23{\cdot}096}{3{\cdot}1547}$

(1)-லிருந்து $h = 3{\cdot}7321 \times \frac{23{\cdot}096}{3{\cdot}1547}$

$= 27{\cdot}3$ மீட்டர்கள்.

பயிற்சி 6-1.

(1) $\angle B$ செங்கோணம் எனக்கொண்டு $\triangle ABC$-யின் தீர்வைக் காண்க.

(i) $a = 85\ 63$; $c = 43°\ 24'$

(ii) $b = 125{\cdot}7$ · $A = 75°\ 12'$

(iii) $a = 75$; $c = 82{\cdot}5$

(iv) $a = 17{\cdot}20$; $c = 24{\cdot}90$

(2) 12000 மீட்டர் உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு சேதமடைந்த விமானம் தரைக்கு இறங்க முற்படுகிறது. 11° சரிவில் அது இறங்கத் தொடங்கினால் தரையினை 10 கி.மீ. தொலைவில் தட்டுமா எனக்காண்க.

(3) 100 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கலங்கரை விளக்கத்தோடு ஒரே நேர்கோட்டிலுள்ளவாறு அதன் எதிரெதிர்ப்புறங்களில் இரு கப்பல்கள் இருக்கின்றன. கலங்கரை விளக்கத்தின் உச்சியினின்று அவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 30°, 45° என்றால் அக் கப்பல்களுக்கிடையிலுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

(4) ஒருவர் ஒரு குன்றை நோக்கி 820 மீட்டர்கள் நடக்கையில் அதன் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 11°35′-லிருந்து 65° 15′ஆக மாறக் காண்கிறார். குன்றின் உயரத்தினைக் கணக்கிடுக.

(5) ஒரு மலையின் உச்சியிலிருந்து அதன் அடிவாரத்துடன் ஒரே நேர்கோட்டில் மேற்கில் அமைந்திருக்கும் இரண்டு அடுத்தடுத்த கிலோமீட்டர் கற்களின் இறக்கக் கோணங்களை முறையே 45°, 15° என ஒருவர் கண்டால் மலையின் உயரத்தினைக் கணக்கிடுக.

(6) 2500 மீ. உயரத்தில் பறக்கும் ஒரு விமானத்தினின்று ஒரு மேகக்கூட்டம் 15° ஏற்றக் கோணத்திலும் கீழேயுள்ள ஓர் ஏரியில் அதன் பிம்பம் 45° இறக்கக் கோணத்திலும் காணப்படுகின்றன. மேகக் கூட்டம் எவ்வளவு உயரத்திலிருக்கிறது என்பதைக் கணக்கிடுக.

(7) 300 மீட்டர் உயரமுள்ள ஒரு குன்றின் உச்சியி லிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி, அடி இவற்றின் இறக்கக் கோணங்கள் முறையே 45°, 60° எனில் கோபுரத்தின் உயரத் தைக் கணக்கிடுக.

(8) 60. மீ. உயரமுள்ள ஒரு கட்டடத்தின் உச்சி, அடி இவற்றிலிருந்து ஒரு கோபுரத்தின் உச்சி முறையே 50°, 70° ஏற்றக் கோணங்களில் காணப்பட்டது எனில், கோபுரத்தின் உயரத்தைக் கணக்கிடுக.

(9) 200 மீ. உயரமுள்ள ஒரு கட்டத்தின் உச்சியில் ஒரு வானொலிக் கோபுரம் அமைந்துள்ளது. அக் கட்டடத்தின் அடியி னின்று 500 மீ. தொலைவில் உள்ள ஓர் இடத்தினின்று அக் கோபுரத்தின் உச்சி 10° ஏற்றக் கோணத்தில் காணப்பட்டால் கோபுரத்தின் உயரத்தினைக் காண்க.

(10) மணிக்கு 40 கி.மீ. வேகத்தில் வடக்காகச் செல்லும் ஓர் ஊர்தியிலிருந்து கிழக்காக ஒரு கோட்டில் அமைந்திருக்கும் ஒரு மரம், ஒரு கோபுரம் இவை கவனிக்கப்படுகின்றன. ஒரு மணி நேரத்திற்குப் பிறகு அவை S34° 40′ E; S65° 10′E என்ற அளவுகளில் காணப்பட்டால், அம் மரத்திற்கும் கோபுரத்திற்கும் இடையிலுள்ள தூரத்தைக் கணக்கிடுக.

(11) ஒரு கோபுரமும், அதன் மீதுள்ள ஒரு கொடிக்கம்பமும் அக கோபுரத்தின் அடியிலிருந்து 60 மீ தொலைவிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தனித்தனியாக 30° கோணத்தைத் தாங்குகின்றன எனில், அவற்றின் உயரங்களைக் காண்க.

(12) சூரியக்கதிரின் படுகைக் கோணம் 45°-யிலிருந்து 30°ஆக மாறுகையில் ஒரு கோபுரத்தின் நிழலின் நீளம் 60 மீ. அதிகரிக்கின்றது எனில், அக் கோபுரத்தின் உயரம் 30 $[1+\sqrt{3}]$மீ. என்று காட்டுக.

(13) ஒரே கிடைக்கோட்டில் அமைந்துள்ள A, B, C என்ற மூன்று புள்ளிகளிலிருந்து அவற்றிற்கு ஒரே திசையில் பறக்கும் ஒரு பலூன் கவனிக்கப்படுகின்றது. $AB = 220$ மீ, $BC = 100$ மீ. A-யிலிருந்து பலூனின் ஏற்றக் கோணத்தைப்போல் B, C-யிலிருந்து பலூனின் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே இரண்டு, மூன்று

மடங்குகள் என்றால் பலூன் எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது என்று கணக்கிடுக.

(14) A என்ற இடத்திலிருந்து ஒரு பறக்கும் விமானத்தின் ஏற்றக் கோணம் $60°$ எனவும், அதே சமயத்தில் 4 கி.மீ. தூரத்திலுள்ள B என்ற இடத்திலிருந்து அதன் ஏற்றக் கோணம் $30°$ எனவும் கணிக்கப்பட்டால் விமானம் தரையிலிருந்து எவ்வளவு உயரத்தில் பறக்கிறது என்பதைக் கணக்கிடுக. (இரு விடைகள் சாத்தியக் கூறினை அலசுக.)

7. முக்கோணங்களின் பண்புகளும், அவற்றின் தீர்வுகளும்

7-1. சாய்வு முக்கோணங்கள்

முந்தைய அத்தியாயத்தில் செங்கோண முக்கோணங்களின் தீர்வுகள் காணும் முறையையும் அவற்றின் பயன்களைப் பற்றியும் கற்ேறாம். இப்பொழுது செங்கோண முக்கோணம் மட்டுமின்றி எல்லாவகை முக்கோணங்களுக்கும் தீர்வுகாணும் முறையைக் காண்போம்.

முக்கோணங்களைக் கொடுக்கப்பட்ட அளவுகளை வைத்துப் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தலாம் :

SAA = ஒருபக்கம், இரண்டு கோணங்கள்.

SSA = இருபக்கங்களும், அவற்றில் ஒன்றுக்கெதிரான கோணமும்.

SAS = இரண்டு பக்கங்களும் அவற்றின் இடைக் கோணமும்.

SSS = மூன்று பக்கங்கள்.

(AAA வகை முக்கோணங்களின் தீர்வு காண முடியுமா?)

மேற்கண்ட முக்கோணங்களின் தீர்வு காணுதல் பற்றி இப்பொழுது நாம் கற்போம். முக்கோணத்தின் ஆறு அளவுகள் சம்பந்தப்பட்ட சூத்திரங்களைக் காணுதல், அவற்றைப் பயன் படுத்தி முக்கோணங்களின் தீர்வைக் காணுதல், பரப்பு, உள்வட்ட ஆரம், வெளிவட்ட ஆரங்கள் இவை சம்பந்தப்பட்ட சில சிறப்புப் பண்புகள் முதலியவற்றை நாம் கற்போம்.

7-2. சைன் சூத்திரம்

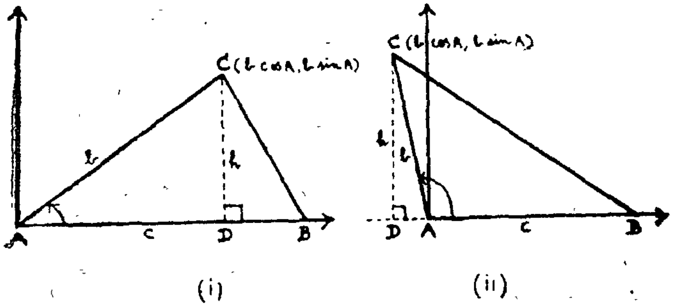
ABC என்ற ஏதேனும் ஒரு முக்கோணத்தில்

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

"முக்கோணங்களின் பக்கங்கள் அவற்றிற்கு எதிர் கோணங்களின் சைன் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கும்" எனக் கூறலாம்.

நிரூபணம்

Aஐ அடிப்படைக் கோணமாகக் கொண்ட $\Delta\ ABC$ஐ வரைக,



படம் 7.1.

[படம் (i)-ல் A ஒரு குறுங்கோணம்.

படம் (ii)-ல் A ஒரு விரிகோணம்]

h = C-யிலிருந்து வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து உயரம்.

= C-ன் Y அச்சு தூரம்.

$h = b \sin A$ [$\sin A$-யின் வரையறையிலிருந்து] செங்கோண முக்கோணம் BDC-ல்

$$h = a \sin B$$

$$b \sin A = a \sin B$$

எனவே $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin b} \quad \ldots(1)$$

B-யை அடிப்படைக் கோணமாகக் கொண்டால்

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad ...(2)$$

எனக் காணலாம்.

(1), (2) இவற்றிலிருந்து

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ எனக் காண்கிறோம்.

[குறிப்பு :

இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி SAA அல்லது SSA வகை முக்கோணங்களின் தீர்வுகளைக் காணலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு

$\sin A : \sin C = \sin (A-B) : \sin (B-C)$ எனில், a^2, b^2, c^2 கூட்டுத் தொடரில் அமைந்துள்ளன எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin (A-B)}{\sin (B-C)}$$

$$\Longrightarrow \sin A \sin (B-C) = \sin C \sin (A-B)$$

$$\Longrightarrow \sin (B+C) \sin (B-C) = \sin (A+B) \sin (A-B)$$

$$\Longrightarrow \sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2 B \quad ...(1)$$

ஆனால் $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k}$ என்க.

$$\sin A = ka$$

$$\sin B = kb$$

$$\sin C = kc$$

(1)-லிருந்து $k^2 b^2 - k^2 c^2 = k^2 a^2 - k^2 b^2$

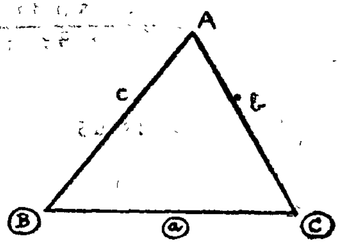
அல்லது $b^2 - c^2 = a^2 - b^2$

அல்லது a^2, b^2, c^2 என்பன கூட்டுத் தொடரில் அமைந்துள்ளன.

7-3. *SAA* வகை முக்கோணங்களின் தீர்வு காணுதல்

$\triangle ABC$-ல் a, B, C இவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்க.

(i) $A + B + C = 180°$ இதிலிருந்து A-ஐக் காணலாம்.



படம் 7-2.

(ii) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

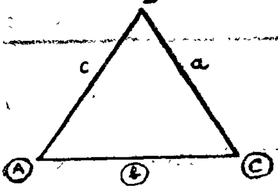
$b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$ இதினின்று b-யைத் தீர்மானிக்கலாம்.

(iii) $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$ இதினின்று c-யைத் தீர்மானிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$A = 35° \, 17'$; $C = 45° \, 13'$; $b = 42{\cdot}1$ எனில் $\Delta\, ABC$-யின் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு :



படம் 7-3.

(i) $B = 180° - (A + C)$

$= 180° - (35° \, 17' + 45° \, 13')$

$= 99° \, 30'$

(ii) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$

$= \frac{42 \cdot 1 \sin 35°17'}{\sin 99°\ 30'}$

$= 24 \cdot 65.$

x	$\log x$
42·1	1·6243
sin 35°17′	$\bar{1}$·7616
	1·3859
sin 99°30′ = sin 80°30′	$\bar{1}$·9940
24·65	1·3919

(iii) மேலும்,

$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$

$= \frac{42 \cdot 1 \sin 45°13'}{\sin 99°30'}$

$= 30 \cdot 30$

x	$\log x$
42·1	1·6243
sin 45°13′	$\bar{1}$·8511
	1·4754
sin 99°·30′	$\bar{1}$·9940
30·30	1·4814

∴ $\triangle ABC$-யின் தீர்வுகள் பின்வருமாறு:

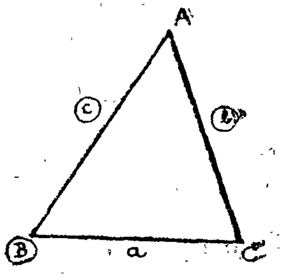
$B = 99°30'$, $a = 24 \cdot 65$, $c = 30 \cdot 30$.

7·4. SSA வகை முக்கோணத்தின் தீர்வு காணுதல்

$\triangle ABC$-ல் b, c, $\angle B$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

(i) $\sin C = \frac{c \sin B}{b}$

அல்லது $\log \sin C = \log c + \log \sin B - \log b$. ...I



படம் 7·4.

இதிலிருந்து $\angle C$-ஐப் பின்வருமாறு கணக்கிடலாம்.

நிலை (i) : I-ன் வலப்பக்கம் மிகை எண்ணாக இருந்தால் $\log \sin C$-யும் மிகை எண்ணாகும்.

அதாவது $\sin C > 1$. இது முரணானது. இத்தகைய அளவுகளுக்குத் தீர்வு கிடையாது.

நிலை (ii) : I-ன் வலப்பக்கம் பூஜ்யமானால் $\log \sin C = 0$ அதாவது $\sin C = 1$ அதாவது $C = 90°$ ஆகும். இதில் ஒரு தீர்வு அமையும். கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.

நிலை (iii) I-ன் வலப்பக்கம் குறை எண்ணாக இருந்தால் $\sin C$-ன் மதிப்பு 1-ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும் ($= m$ என்க). இவ்வகையில் C-க்கு இரு தீர்வுகள் அமைய வழி உண்டு.

$$\sin C_1 = m_1, \quad \sin C_2 = m, \; C_2 = 180° - C_1$$

எடுத்துக்காட்டு :

$\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$ ஆனால்

$B + C < 180°$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இசைந்த தீர்வுதான் C-க்கு இருக்க முடியும்.

(ii) C-யைக் கண்ட பிறகு $A + B + C = 180°$ என்ற உண்மையைப் பயன்படுத்தி A-ன் மதிப்பைக் காணலாம்.

C-ன் மதிப்பைப் பொறுத்து A-க்கும் இரு தீர்வுகள் அமையலாம்.

(iii) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ என்ற சூத்திரத்திலிருந்து 'a'-ன் மதிப்பைக் காணலாம். A-ன் மதிப்பைப் பொறுத்து 'a'-க்கும் இரு தீர்வுகள் அமையலாம்.

[குறிப்பு :

இவ்வகை, "ஒரே தீர்வு இலா வகை" எனப்படும். ஏனெனில் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை 0, 1 அல்லது 2 ஆக இருக்கலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு 1

$a = 2$, $b = 10$, $A = 30°$ எனில் ΔABC-ன் தீர்வைக் காண்க

தீர்வு :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

அல்லது $$\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin B}$$

அல்லது $$\sin B = \frac{10 \times \sin 30^\circ}{2}$$

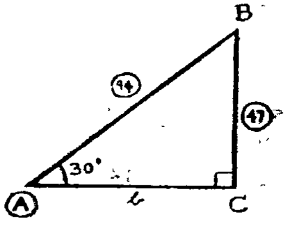
$$= \frac{10}{2} \times \tfrac{1}{2} = 2{\cdot}5$$

$2{\cdot}5 > 1$ ஆக அமைந்திருப்பதால் $\sin B = 2{\cdot}5$ என்ற நிலையில் B என்ற கோணமே அமைந்திருக்காது.

$\therefore$ இம் முக்கோணத்திற்குத் தீர்வு இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 2

$A = 30°$, $a = 47$; $C = 94°$, ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்று நிரூபிக்க; மேலும் b-ஐக் காண்க.



படம் 7-5

(i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore \sin C = \dfrac{c \sin A}{a}$

$= \dfrac{94 \sin 30°}{47}$

$= \dfrac{94}{47} \times \frac{1}{2} = 1$

$\therefore$ எனவே $C = 90°$

(ii) $A + C = 30° + 90° = 120°$

$A + B + C = 180$; $\therefore B = 60°$

(iii) $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{a}{\sin A}$

$b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$

$= \dfrac{47 \times \sin 60°}{\sin 30°}$

$= \dfrac{47 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 47\sqrt{3}$

எடுத்துக்காட்டு 3

$a = 5$, $b = 4$, $A = 45$ எனில் $\triangle ABC$-ன் மற்ற கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$

$= \dfrac{4 \sin 45°}{5}$

x	log x
4	0·6021
sin 45°	$\bar{1}$·8495
	0·4516
5	0·6990
	$\bar{1}$·7526

$\log \sin B = \bar{1}\cdot 7526$

$B_1 = 34° 27'$

மேலும் $B_2 = 180° - B_1$

$= 145° 33'$

இவை B-ன் தீர்வுகளாகும்.

$A + B_2 > 180°$; எனவே B_2 ஒரு தீர்வாக அமையாது.

(i) $\therefore B_1 = 34° 27'$

(ii) $C = 180° - (A + B)$

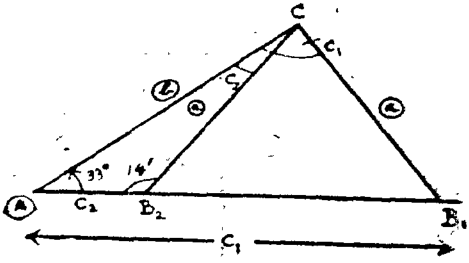
$= 180° - 79° 27'$

$= 100° 33'$

எடுத்துக்காட்டு 4

$a = 257$, $b = 341$, $A = 33°14'$

எனில், $\triangle ABC$-யின் தீர்வைக் காண்க.



படம் 7-8.

$A < 90°;\ a < b.$

தீர்வு :

∴ இரண்டு தீர்வுகள் அமைய வகையுண்டு,

(i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$= \frac{341 \sin 33°14'}{257}$$

$\log \sin B = \bar{1} \cdot 8617$

∴ $B = 46°39'$ அல்லது

$180° - 46°39'$

இவற்றை $B_1 = 46°39'$

$B_2 = 133°21'$

என்று குறித்துக் கொள்க.

x	$\log x$
341	2 · 5328
sin 33°14′	$\bar{1}$. 7388
	2 · 2716
257	2 . 4099
	$\bar{1}$. 8617

(ii) $B = B_1 = 46°\ 39'$ என இருக்கும்போது

$$C = C_1 = 180° - (A + B_1)$$

$$= 180° - 79°\ 53'$$

$$= 100°\ 7'$$

(iii) C-க்கு இசைந்த c_1-ன் மதிப்பு

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$$

$$= \frac{257 \sin 100° 7'}{\sin 33° 14'}$$

$$= 462.$$

x	$\log x$
257	2·4099
sin 100° 53′ = sin 79° 53′	$\bar{1}$·9932
	2·4031
sin 33° 14′	$\bar{1}$·7388
462	2·6643

(ii) $B = B_2 = 133° 21'$ என இருக்கும்பொழுது

$$C = C_2 = 180° - (A + B_2)$$

$$= 180° - 166° 35'$$

$$= 13° 25'$$

(iii) C-க்கு இசைந்த c_2-ன் மதிப்பு

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$$

$$= \frac{257 \sin 13° 25'}{\sin 33° 14'}$$

$$= 109 \text{ சுமார்}$$

x	$\log x$
257	2·4099
sin 13° 25′	$\bar{1}$·3655
	1·7757
sin 33° 14′	$\bar{1}$·7388
108·7	2·0316

$B_1 = 46° 39'$; $C_1 = 100° 7'$; $c_1 = 462$

$B_2 = 133° 21'$; $C_2 = 13° 25'$ $c_2 = 109$

இதுவே $\triangle ABC$-யின் தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 7-1.

(1) $\triangle ABC$-யின் சுற்றுவட்ட மையம் S. BS-ஐச் சேர்த்து நீட்டி வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளியை P எனக் குறிக்க

$$\sin \angle BPC = \frac{a}{2R} \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

எனவும் நிரூபிக்க. [R = சுற்றுவட்ட ஆரம்]

(2) ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்கள் 1 : 2 : 3 என்ற விகிதத்திலிருந்தால் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்கள் $1 : \sqrt{3} : 2$ என இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

(3) $\triangle ABC$-யில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $a \sin A - b \sin B = c \sin (A - B)$

(ii) $b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C)$

(iii) $\Sigma a \sin (B - C) = 0$

(iv) $\Sigma a \cos (B - C) = \dfrac{abc}{R^2}$

(v) $\dfrac{\sin (B - C)}{\sin (B + C)} = \dfrac{b^2 - c^2}{a^2}$

(vi) $a \cos A = b \cos B$ எனில், $\triangle ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் அல்லது ஓர் இரு சமபக்க முககோணம்.

(4) பின்வரும் முக்கோணங்களின் தீர்வுகளைக் காண்க:

(i) $a = 80, \quad A = 45°, \quad B = 60°$

(ii) $A = 42° 54'; \quad B = 64° 23'; \quad a = 18{\cdot}92$

(iii) $B = 49° 6'; \quad C = 53° 18', \quad a = 16{\cdot}68$

(iv) $A = 70°$; $C = 80°$ $c = 360$

(v) $a = 6{\cdot}22$; $A = 72° 20'$; $B = 55° 30'$

(5) ஓர் இணைகரத்தின் ஒரு பக்கம் 598 மீ. நீளமுடையது. அப்பக்கம் மூலை விட்டங்களுடன் முறையே 27°, 42° கோணங்களை உண்டாக்குகிறது எனில், மூலைவிட்டங்களின் நீளங்களைக் கணக்கிடுக.

(6) A, B என்பன ஒரு நதியின் ஒரு கரையில் 180 அடி தூரத்தில் அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகள் ஆகும். மேலும் C என்பது மறுகரையிலுள்ள ஒரு புள்ளி ஆகும்; $\angle CAB = 60°$; $\angle CAB = 45°$ எனில், ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்க. [ஆற்றின் கரைகளை நேர் கோடாகக் கருதுக.]

(7) பின்வரும் முக்கோணங்களை அளவுத்திட்டமின்றி வரைந்து அவற்றின் தீர்வுகளின் எண்ணிக்கையை நிறுவுக. p என்பது C-யிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் ஆகும்.

(i) $A < 90°$; $a < b$; $a < p$

(ii) $A < 90°$; $a < b$; $a = p$

(iii) $A < 90°$; $a < b$; $a > p$.

(iv) $A < 90°$; $a > b$

(v) $A > 90°$; $a > b$

(vi) $A > 90°$; $a < b$

(8) $\triangle ABC$-ல் $b = 50\sqrt{3}$; $B = 30°$; $c = 150$ ஆகும்.

இரண்டு முக்கோணங்கள், வரைய [ஒன்று செங்கோண முக்கோணம்; மற்றொன்று இருசமபக்க முக்கோணம்] வகை உண்டு என்று நிரூபிக்க.

(9) $A = 83°6'$; $a = 95$; $b = 96$ எனில தீர்வு இல்லை என்று நிரூபிக்க.

(10) $a = 186$; $b = 210$; $B = 114°$ என்ற அளவுகளுக்கு ஒரே ஒரு முக்கோணந்தான் தீர்வாக அமையும் என்று காட்டுக

(11) $b = \sqrt{6}$; $c = 2\sqrt{3}$; $B = 30°$ எனில், ΔABC-யைத் தீர்க்க

(12) பின்வரும் முக்கோணங்களைத் தீர்க்க.

(i) $a = 12$; $b = 10$; $A = 40°$

(ii) $c = 8{\cdot}0$; $b = 5{\cdot}0$; $B = 34°$

(iii) $b = 39$, $c = 57$, $B = 35°20'$

(iv) $a = 53.16$, $b = 31{\cdot}29$; $B = 71°14'$

(v) $a = 256{\cdot}7$, $b = 342{\cdot}5$, $B = 32°17'$

7-5. நேப்பியரின் சூத்திரம்

ΔABC-யில் $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

நிரூபணம் : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (எனக)

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{k \sin B - k \sin C}{k \sin B + k \sin C}$$

$$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$= \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$\cot\frac{A}{2}$ ஆல் இருபுறங்களிலும் பெருக்க

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2} = \tan\frac{A}{2}\cot\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\therefore \tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

[குறிப்பு :

இதே போல் பின்வருவனவற்றையும் நிரூபிக்கலாம்.

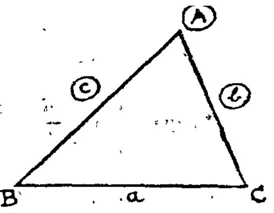
$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

இவை டேன்ஜண்ட் சூத்திரங்கள் எனவும் வழங்கப்படுவதுண்டு.]

7·6. S A S வகை முக்கோணங்களின் தீர்வு காணல்

$\triangle$ ABC-ல் b, c, A இவை கொடுக்கப்பட்டால் [A-இடைக்கோணம்].



படம் 7-7

(i) நேப்பியரின் சூத்திரத்திலிருந்து

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

இதிலிருந்து $\frac{B-C}{2}$ ஐக் காணலாம்.

$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$ என்பது தெரிந்ததே.

இதிலிருந்து B-யையும் C-யையும் காணலாம்.

(ii) சைன் சூத்திரமான $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ யிலிருந்து a-யின் மதிப்பைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$\triangle ABC$-ல் $b = 6{\cdot}5$, $c = 8{\cdot}2$, $A = 54° 18'$ எனில், $\triangle ABC$-ன் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு :

குறைக் குறியைத் தவிர்க்க $\tan\frac{C-B}{2}$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துவோம் $[c > b \quad \therefore C > B]$

$$\text{(i)} \quad \tan\frac{C-B}{2} = \frac{c-b}{c+b}\cot\frac{A}{2}$$

$$= \frac{8{\cdot}2 - 6{\cdot}5}{8{\cdot}2 + 6{\cdot}5}\cot 27° 9'$$

$$= \frac{1{\cdot}7}{14{\cdot}7} \cdot \frac{1}{\tan 27° 9'}$$

$$\log\tan\frac{C-B}{2} = \bar{1}{\cdot}3532$$

$$\frac{C-B}{2} = 12° \; 43' \qquad \dots (1)$$

ஆனல் $\frac{C+B}{2} = \frac{90° - A}{2} = 62° \; 51' \qquad \dots (2)$

(1) + (2) ; $C = 75° \; 34'$

(2) − (1) ; $B = 50° \; 8'$

(ii) $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$$\therefore \; a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

$$= \frac{8{\cdot}2 \sin 54° \; 18'}{\sin 75° \; 34'}$$

$$= 6{\cdot}877$$

$$\therefore \; C = 75° \; 34'; \; B = 50° \; 8'; \; a = 6{\cdot}877$$

பயிற்சி 7-2.

(1) $\triangle ABC$-ல்

(i) $(b-c)\cos\frac{A}{2} = a \sin\frac{B-C}{2}$ என்றும்

(ii) $(b+c)\sin\frac{A}{2} = a \cos\frac{B-C}{2}$ என்றும்

காட்டுக.

(2) $\frac{b+c}{2} = \cot\frac{A}{2}$ எனில், $\triangle ABC$ ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்று நிரூபிக்க.

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்கள் 7 : 3 என்ற விகிதத்திலிருக்கின்றன. அவற்றின் இடைக்கோணம் 48° 30′ எனில், மற்ற கோணங்களைக் காண்க.

(4) $\Delta\ ABC$-யின் தீர்வு காண்க :

(i) $a = 26$, $c = 20$, $B = 50^\circ$

(ii) $b = 120$, $c = 270$, $A = 118^\circ\ 40'$

(iii) $a = 4000$, $b = 3000$; $C = 40^\circ$

(iv) $a = 3621$, $c = 3014$; $B = 78^\circ\ 10'$

(5) ஒரு முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே $\sqrt{3} + 1$; $\sqrt{3} - 1$ ஆகும். அவற்றின் இடைக் கோணம் 60° எனில், மீதிக் கோணங்களையும் பக்கத்தையும் காண்க.

(6) $b : c = 83 : 45$; $A = 56^\circ\ 24'$ எனில், B-யையும் C-யையும் காண்க.

7-7. கொசைன் சூத்திரம்

$\Delta\ ABC$-யில்

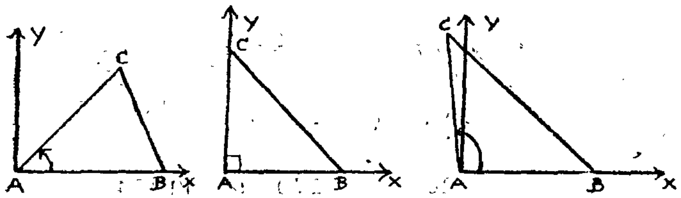
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

நிருபணம் :

A என்ற புள்ளி (o,o) என இருக்கும்படியும், C என்பது X அச்சின் மீது அமையும்படியும் $\Delta\ ABC$ ஐ அமைக்க. B-ன் அச்சுத் தூரங்கள் (c, o) ஆகும். C-யின் அச்சுத் தூரங்கள் $(b \cos A,\ b \sin A)$ ஆகும். [A குறுங்கோணமாகவோ, விரிகோணமாகவோ, செங்கோணமாகவோ இருக்கலாம்].



படம் 7-8

$BC = a$; இது தூரத்தைக் காணும் சூத்திரத்தால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது.

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \sin A - o)^2$$
$$= b^2 \cos^2 A - 2\,bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A$$
$$= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

Aஐ அடிப்படைக் கோணமாகக் கொண்டு இச் சூத்திரம் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வாறுகவே B, C–க்களை அடிப்படைக் கோணங்களாகக் கொண்டு மற்ற இரு சூத்திரங்களையும் நிரூபிக்கலாம்.

கிளைத் தேற்றம்

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

[குறிப்பு :

(1) SSS வகை முக்கோணங்கள்

(2) SAS வகை முக்கோணங்கள்

ஆகியவற்றின் தீர்வுகளையும் காண இச் சூத்திரங்கள் பயன்படும்.]

எடுத்துக்காட்டு 1

$\triangle\, ABC$-ல் $\tan \theta = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b} \sin \dfrac{C}{2}$ ஆனால்,

$c = (a - b) \sec \theta$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}\sin\frac{C}{2}$$

$$\therefore \tan^2\theta = \frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{C}{2}}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab+2ab.2\sin^2\frac{C}{2}}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab\left(1-\sin^2\frac{C}{2}\right)}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab\cos C}{(a-b)^2}$$

$$= \frac{c^2}{(a-b)}$$

$$\therefore \sec^2\theta = \frac{c^2}{(a-b)^2}$$

அல்லது $c = (a-b)\sec\theta$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$a = 5$; $b = 4$; $c = 8$ எனில், A-யின் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{4^2+8^2-5^2}{2\cdot 4\cdot 8}$$

$$= \frac{16 + 64 - 25}{64}$$

$$= \frac{55}{64}$$

$$= \cdot 8594$$

$$A = 30^\circ 45'$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$C = 100^\circ$; $a = 15{\cdot}277$; $b = 20{\cdot}593$ எனில், c-யைக் காண்க.

தீர்வு :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos A$$

$$= (15{\cdot}277)^2 + (20{\cdot}593)^2 - 2\,(15{\cdot}277).\;(20{\cdot}593) \times (-0{\cdot}17365)$$

$$= 767{\cdot}37$$

$$c = 27{\cdot}701$$

குறிப்பு :

SSS, *SAS* வகை முக்கோணங்களின் தீர்வுகாண கொசைன் சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்பட்ட போதிலும், இம்முறை கடினமாக இருப்பதால் மாற்று முறைகள் பின்னர் கொடுக்கப்படும்.

பயிற்சி 7-3

(1) $a = 9$, $b = 8$, $C = 4$ எனில், $6 \cos C = 4 + 3 \cos B$ என்று காட்டுக.

(2) $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{\cos B}{b}$ எனில், அம்முக்கோணம் ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணம் என்று காட்டுக.

(3) $a : b : c = 4 : 5 : 6$ எனில், $C = 2A$ என்று

(4) பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $c^2 = (a-b)^2 \cos^2\frac{C}{2} + (a+b)^2 \sin^2\frac{C}{2}$

(ii) $c = (a-b) \cos\frac{C}{2} \sec\theta$

$\left[\tan\theta = \frac{a+b}{a-b}\tan\frac{C}{2}\right.$ என்று கொள்க. $\left.\right]$

(iii) $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

(iv) $2(\Sigma\, bc\cos A) = a^2 + b^2 + c^2$

(v) $(b^2 - c^2)\cot A + (c^2 - a^2)\cot B + (a^2 - b^2)\cot C = 0$

(5) a, b, c-யைப் பக்கங்களாகவும் $C = 60°$ யும் கொண்ட முககோணம் ABC-யில் $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ என்று நிரூபிக்க.

(6) $x^2 + x + 1$; $2x + 1$; $x^2 - 1$ என்பன ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எனில், மிகப் பெரிய கோணம் $120°$ என்று நிரூபிக்க.

(7) 7, $4\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ அலகுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மிகச் சிறிய கோணத்தைக் காண்க.

(8) $C = 100°$; $a = 15$; $b = 20$ எனில், $c = 27$ எனக் காட்டுக.

(9) எம் முக்கோணம் ABC-யிலும்

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2}\sin 2C = 0$$

என நிரூபிக்க.

(10) $a = 2,\ b = \sqrt{3} + 1,\ C = 60°$ எனில், முக்கோணம் ABC-யின் தீர்வைக் காண்க.

7-8. அரைக்கோணச் சூத்திரங்கள்

(i) $$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(a + b - c)\ (a - b + c)}{2\,b\,c}$$

$a + b + c = 2\,s$ எனில்

$$a - b + c = (a + b + c) - 2b$$

$$= 2\,s - 2\,b = 2\,(s - b)$$

மேலும், $a + b - c = 2\,(s - c)$

$b + c - a = 2\,(s - a)$ ஆகும்.

$$\therefore\ 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2\,(s - c)\ 2\,(s - b)}{2\,b\,c}$$

$\frac{A}{2}$ என்பது எப்பொழுதும் குறுங்கோணமாகவே இருப்பதால்,

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - b)}{b\,c}}$$ ஆகும்.

இதே போல் $$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s - c)\,(s - a)}{c\,a}}$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{a\ b}}$$

என நிரூபிக்கலாம்.

(ii) $2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$

$$= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,b\,c}$$

$$= \frac{2\,s.\;2\,(s - a)}{2\,b\,c}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - a)}{b\,c}}$$

இதேபோல் $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - b)}{c\,a}}$

$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - c)}{a\,b}}$ ஆகும்.

(iii) (i), (ii) இவற்றை இணைக்க,

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{s\,(s - a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s - c)\,(s - a)}{s\,(s - b)}}$$

$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)\,(s - b)}{s\,(s - c)}}$ ஆகும்.

(iv) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$= 2\sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{b\,c}}\sqrt{\frac{s\,(s - a)}{b\,c}}$$

$$\therefore \sin A = \frac{2}{b\,c}\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

இதேபோல் sin B, sin C ஆகியவற்றையும் s, a, b, c மூலம் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

எம் முக்கோணத்திலும்

$$(b + c - a)\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right) = 2a\cot\frac{A}{2}$$

என்று நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$(b + c - a)\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2(s-a)\left\{\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}} + \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}\right\}$$

$$= 2\sqrt{s(s-a)}\left\{\sqrt{\frac{(s-b)}{(s-c)}} + \sqrt{\frac{(s-c)}{s-b}}\right\}$$

$$= 2\sqrt{s(s-a)}\left\{\frac{(s-b)+(s-c)}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\right\}$$

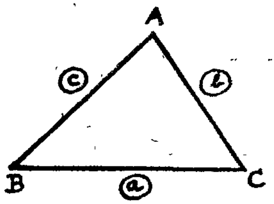
$$= 2\sqrt{s(s-a)}\left\{\frac{2s-b-c}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\right\}$$

$$= 2a\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$= 2a\cot\frac{A}{2}$$

7-9. SSS வகை முக்கோணங்களின் தீர்வு காணல்

பக்கங்கள் a, b, c கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :



படம் 7-9.

(i) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி A-ஐக் காணலாம்.

(ii) இதேபோல் B-ஐக் காணலாம்.

(iii) $C = 180° - (A + B)$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு

$a = 7\cdot 8;\quad b = 5\cdot 6;\quad c = 4\cdot 5$ எனில், அம் முக்கோணத்தின் தீர்வு காண்க:

தீர்வு:

$a = 7\cdot 8$

$b = 5\cdot 6$

$c = 4\cdot 5$

$2s = 17\cdot 9$

$s = 8\cdot 95$

x	$\log x$
$s = 8\cdot 95$	0·9518
$s-a = 1\ 15$	0·0607
$s-b = 3\cdot 35$	0·5250
$s-c = 4\cdot 45$	0·6484

(i) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\ )s-c)}{s\ (s-a)}}$

$\log\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\{\log(s-b) + \log(s-c) - \log(s) - \log(s-a)\}$

$= \frac{1}{2}\{0\cdot 5250 - 0\cdot 9518 + 0\cdot 6484 - 0\cdot 0607\}$

$= \frac{1}{2}\{1\cdot 1734 - 1\cdot 0125\}$

$= \frac{0\cdot 1609}{2}$

$= 0\cdot 0805$

$\frac{A}{2} = 50^\circ\ 17'$ அல்லது $A = 100^\circ\ 34'$

(ii) $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)\ s-a)}{s\ (s-b)}}$

$\log\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\{\log(s-c) + \log(s-a) - \log s - \log(s-b)\}$

$= \frac{1}{2}\{0\cdot 6484 - 0\cdot 9518 + 0\cdot 0607 - 0\cdot 5250\}$

$= \frac{1}{2}\{0\cdot 7091 - 1\cdot 4768\}$

$\frac{\bar{1}\cdot 2323}{2} = \bar{1}\cdot 6162$

$\therefore \frac{B}{2} = 22^\circ\ 27'$, அல்லது $B = 44^\circ\ 54'$.

(iii) $A = 100^\circ\ 34'$

$B = 44^\circ\ 54'$ $\therefore A + B = 145^\circ\ 28'$

$\therefore C = 180^\circ - (A + B)$

$= 34^\circ\ 32'$

$A = 100^\circ\ 34'$, $B = 44^\circ\ 54'$, $C = 34^\circ\ 32'$

ஆகும்.

பயிற்சி 7-4.

(1) $a = 68$; $b = 93$; $c = 71$ எனில், ΔABC யில் Aஐக் காண்க.

(2) $a = 52 \cdot 8$, $b = 39 \cdot 3$; $c = 72 \cdot 5$ எனில், முக்கோணத்தின் மிகப் பெரிய கோணத்தைக் காண்க.

(3) $a = 283$; $b = 317$; $c = 428$ எனில், எல்லாக் கோணங்களையும் காண்க.

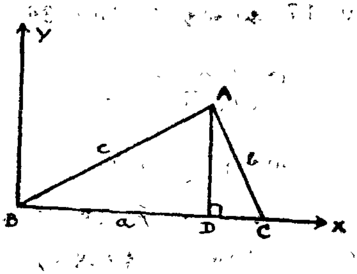
(4) பின்வரும் முக்கோணங்களின் தீர்வுகளைக் காண்க :

(i) $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$.

(ii) $a = 297$; $b = 351$; $c = 432$.

7-10. வீச்சு சூத்திரங்கள்

எம்முக்கோணம் ABC-யிலும் $a = b \cos C + c \cos B$



படம் 7-10.

நிருபணம்

B-ஐ அடிப்படைக் கோணமாகக்கொண்டால்

$a = BC = BD + DC$
$= c \cos B + b \cos C$ ஆகும்.

[குறிப்பு :

இதேபோல் $b = c \cos A + a \cos C$ எனவும்,
$c = a \cos B + b \cos A$ எனவும்
நிரூபிக்கலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு

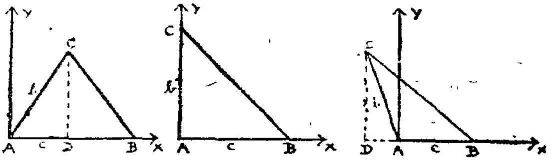
$\Sigma a (b^2 + c^2) \cos A = 3abc$ என்று நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$a (b^2 + c^2) \cos A + b (c^2 + a^2) \cos B + c (a^2 + b^2) \cos C$$
$$= ab^2 \cos A + ac^2 \cos A + bc^2 \cos B + ba^2 \cos B + ca^2 \cos C + cb^2 \cos C$$
$$= ab (b \cos A + a \cos B) + bc (c \cos B + b \cos C) + ca (a \cos C + c \cos A)$$
$$= abc + bca + cab$$
$$= 3abc$$

7-11. பரப்புச் சூத்திரம்

(i) $\triangle ABC$யின் பரப்பு $\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$



படம் 7-11.

நிரூபணம்

Aஐ அடிப்படைக் கோணமாகக் கொண்டு $\triangle ABC$ஐ அமைக்க. C–யின் அச்சுத் தூரங்கள் $(b \cos A, b \sin A)$ ஆகும். D எனபது செங்குத்து உயரம் என்றால்,

$$CD = b \sin A$$

அடிப்பக்கம் $= AB =$

$$\Delta = \tfrac{1}{2} \text{ (அடிப்பக்கம்) (குத்துயரம்)}$$

$$= \tfrac{1}{2} (c) (b \sin A)$$

$$= \tfrac{1}{2} b c \sin A .$$

[குறிப்பு :

இதேபோல் $\Delta = \frac{1}{2} (c)\, a \sin B = \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin C$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.]

(ii) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ என்பது தெரிந்ததே.

$$\Delta = \tfrac{1}{2} a b \sin C$$

$$= \tfrac{1}{2} (2R \sin A)(2R \sin B) \sin C$$

$$\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

இங்குப் பரப்பு, கோண அளவுகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(iii) $\Delta = \frac{1}{2} a b \sin C$

$$= \tfrac{1}{2} a b \frac{c}{2R}$$

$$\therefore \Delta = \frac{abc}{4R}$$

இங்குப் பரப்பு, பக்க அளவுகளிலும் சுற்று ஆரத்திலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(iv) $\Delta = \frac{1}{2} a b \sin C$

$$= \tfrac{1}{2} a b\, 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= ab \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\therefore \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

எடுத்துக்காட்டு

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

என்று நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4\left(\frac{1}{2} bc \sin A\right)}$$

$$= \frac{1}{4\Delta}(b^2 + c^2 - a^2)$$

இதே போல் $\cot B = = \frac{1}{4\Delta}(c^2 + a^2 - b^2)$

$\cot C = \frac{1}{4\Delta}(a^2 + b^2 - c^2)$ ஆகும்.

$$\therefore \Sigma \cot A = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$$

பயிற்சி 7-5.

(1) ΔABC-யில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $(b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C = a + b + c$

(ii) $b\cos^2\frac{C}{2} + c\cos^2\frac{B}{2} = s;\quad [2s = a + b + c]$

(iii) $a^3\cos(B - C) + b^3\cos(C - A) + c^3\cos(A - B) = 3abc$

(2) ΔABC-யில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

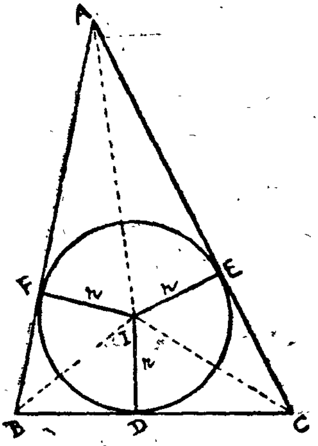
(i) $\Delta = \frac{a^2}{2(\cot B + \cot C)}$

(ii) $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 4\Delta$

(iii) $\left(\frac{b^2 - c^2}{2}\right) \frac{\sin B \sin C}{\sin (B-C)} = \Delta$

(3) $a = 8.4$ செ.மீ., $b = 7.6$ செ.மீ.; $c = 9.2$ செ.மீ. எனில், $\triangle ABC$யின் பரப்பைக் காண்க. அதைப் பயன்படுத்தி மிகச் சிறிய கோணத்தைக் காண்க.

7-12. $\triangle$ ABC-யின் உள்வட்ட ஆரம் காணல்



படம் 7-12.

I என்பது $\triangle ABC$-யின் உள்வட்ட மையம் என்க. $ID = IE = IF = r$ எனக் கொள்க. r-உள் வட்ட ஆரம் என்க

இப்பொழுது $\angle D = \angle E = \angle F = 90°$ ஆகும்.

$\therefore \triangle IBC = \frac{1}{2} BC \; ID$

$= \frac{1}{2} a.r$

இதே போல் $\triangle ICA = \frac{1}{2} b.r$

$\triangle IAB = \frac{1}{2} c.r$

$\triangle ABC$-யின் பரப்பு $= \Delta = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$

$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$

$= \frac{1}{2} r (a + b + c)$

$= \frac{1}{2} r. 2s$

$\Delta = rs$

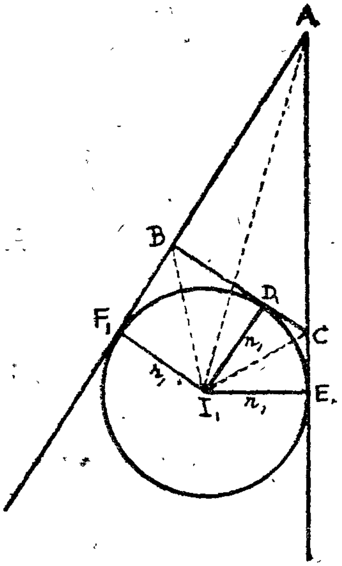
$$r = \frac{\Delta}{s}$$

7-13. $\triangle$ ABC-யின் வெளிவட்ட ஆரங்கள் காணல்

$\triangle ABC$-யில் A-யின் எதிர்ப்புறத்தில் வரையப்பட்ட வெளி வட்டத்தின் மையம் I_1 எனக் கொள்க.

$I_1D_1 = I_1E_1 = I_1F_1 = r_1$ (வெளிவட்ட ஆரம்)
எனக் கொள்க.

$\angle D_1$, $\angle E_1$, $\angle F_1$ இவை செங்கோணங்கள் ஆகும்.



படம் 7-13.

$\therefore \triangle I_1BC = \frac{1}{2} BC \cdot I_1D_1$

$= \frac{1}{2} ar_1$

இதேபோல் $\triangle I_1CA = \frac{1}{2} br_1$;

$\triangle I_1AB = \frac{1}{2} cr_1$ ஆகும்.

$\therefore \triangle ABC$-யின் பரப்பு $= \triangle$

$= \triangle I_1CA + \triangle I_1AB - \triangle I_1BC$

$$\triangle = \frac{1}{2} b r_1 + \frac{1}{2} c r_1 - \frac{1}{2} a r_1$$

$$= \frac{1}{2} r_1 (b + c - a)$$

$$= \frac{r_1}{2} (2s - 2a)$$

$$\triangle = r_1 (s - a)$$

$$r_1 = \frac{\triangle}{s-a}$$

இவ்வாறே $r_2 = \frac{\triangle}{s-b}$ என்றும், $r_3 = \frac{\triangle}{s-c}$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1

p_1, p_2, p_3 என்பன A, B, C-யிலிருந்து பக்கங்களுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்து உயரங்கள் எனில்,

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

என்று நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}$$

$$=\frac{s}{\Delta}$$

$$=\frac{1}{r}$$

A-யிலிருந்து BC-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p_1

$$\therefore \Delta = \tfrac{1}{2}\, a\, p_1$$

$$\therefore \frac{1}{p_1}=\frac{a}{2\Delta}.$$ இதேபோல் $$\frac{1}{p_2}=\frac{b}{2\Delta}\ ;\ \frac{1}{p_3}=\frac{c}{2\Delta}$$

ஆகும்.

$$\therefore \frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{a+b+c}{2\Delta}=\frac{2s}{2\Delta}$$

$$=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}$$ ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2

$\triangle ABC$-யில் $r_1 r_2 r_3 = r s^2$ என்று நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$r_1 r_2 r_3 = \frac{\Delta}{s-a}\cdot\frac{\Delta}{s-b}\cdot\frac{\Delta}{s-c}$$

$$= \frac{\Delta^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)\,\Delta}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= s\,\Delta = s.r\,s = r\,s^2$$

எடுத்துக்காட்டு 3

$\triangle$ ABC-யில் $r\,r_1 + r_2\,r_3 = bc$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$r\,r_1 + r_2\,r_3 = \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{\Delta}{s-a} + \frac{\Delta}{s-b} \cdot \frac{\Delta}{s-c}$$

$$= (s-b)(s-c) + s(s-a)$$

$$= s^2 - sb - sc + bc + s^2 - sa$$

$$= 2\,s^2 - s(a+b+c) + bc$$

$$= 2\,s^2 - s(2s) + bc$$

$$= b\,c$$

பயிற்சி 7-6.

(1) F என்பது $\triangle ABC$-யில் AB உள்ள வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளியாகும். $AF = s-a$ என்று நிரூபிக்க.

(2) வழக்கமான குறியீடுகளுடன் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $rs = \Delta$; $r = (s-a)\tan\dfrac{A}{2}$

(ii) $r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}$

(iii) $4\,R\,r\,s = a\,b\,c$

(iv). $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{2Rr}$

(v) $\dfrac{r_1}{bc} + \dfrac{r_2}{ca} + \dfrac{r_3}{ab} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{2R}$

(vi) $r_1 = 4\,R\,\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

(3) $\triangle ABC$-யில் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$

(ii) $r\,r_1\,r_2\,r_3=\Delta^2$

(iii) $16\,R^2\,r\,r_1\,r_2\,r_3=a^2\,b^2\,c^2$

(4) ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் 15, 14, 13 அலகுள்ளன எனில்,

$R=8\frac{1}{3}$; $r=4$ எனக் காட்டுக.

(5) $\triangle ABC$-யில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக:

(i) $\dfrac{r\,r_1}{r_2\,r_3}=\tan^2\dfrac{A}{2}$

(ii) $a\,(r\,r_1+r_2\,r_3)=b\,(r\,r_2+r_3\,r_1)$
$=c\,(r\,r_3+r_1\,r_2)=abc$

(iii) $r_1\,r_2+r_2\,r_3+r_3\,r_1=s^2$

(iv) $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}+\dfrac{1}{r_3^2}=\dfrac{(a^2+b^2+c^2)}{\Delta^2}$

(6) $r\,r_1=r_2\,r_3$ எனில், அம் முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்று காட்டுக.

(7) $\triangle ABC$-யில் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $r_1+r_2+r_3-r=4R$

(ii) $(r_1-r)\,(r_2+r_3)=a^2$

(iii) $(r_1-r)\,(r_2-r)\,(r_3-r)=4r^2\,R$

(iv) $\dfrac{(r_1-r)}{a}+\dfrac{(r_2-r)}{b}=\dfrac{c}{r_3}$

(8) $r_1+r_2=r_3-r$ எனில், அம் முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்று நிரூபிக்க.

(9) r_1, r_2, r_3 இசைத்தொடரில் இருந்தால் a, b, c என்பன கூட்டுத்தொடரில் அமையும் எனக் காட்டுக.

பகுதி B

விடைகள்

பயிற்சி 1-1.

(1) (a) (i); 405° (b) (iii); 240° (c) (iii); -160° (d) (i); 20° (e) (iv); 300° (f) OY'; -90° (g) OX'; 180°;

(2) (a) 90° (b) -180° (c) 540° (d) -360°;

(3) (a) 20° (b) 30°; (4) (a) 90° (b) 150°.

பயிற்சி 1-2.

(2) (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{6}$ (e) $\frac{\pi}{3}$ (f) 0·055 (g) 2·12;

(3) (a) 135° (b) 144° (c) 540° (d) -45° (e) 300° (f) 172°; (4) 5·24 செ.மீ.

பயிற்சி 2-1.

(3) $\operatorname{cosec}(-150^\circ) = -2$;

(4) $\sin\theta = \frac{4}{5}$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$; $\tan\theta = \frac{4}{3}$;

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$; $\sec\theta = \frac{5}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$.

பயிற்சி 2-2.

(2) (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}$;

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -2, \frac{2}{\sqrt{3}}$;

(c) 1, 0, –, 0 –, 1; (d) 0, – 1, 0, –, – 1, –;

(e) $\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2, -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

பயிற்சி 2-3.

(1) (a) (iii) (b) (iv) (c) (ii);

(2) உண்மை. cos θ-ன் குறி x-ன் குறியைப் பொறுத்து அமையும், (3) இல்லை; இல்லை; x அல்லது $y \not> r$; (4) (a) tan θ; $y > r$ (b) cot θ; $x < r$;

(5) $-\frac{5}{12}, -\frac{13}{12}$;

(6) $-\frac{5}{4}, -\frac{4}{5}$; (7) $-\frac{5}{\sqrt{29}}$;

(8) $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}, -2$;

(9) 13; (10) $\frac{(m^2 - n^2)}{(m^2 + n^2)}, \frac{(m^2 + n^2)}{2mn}$.

பயிற்சி 2-4.

(9) $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

பயிற்சி 4-1.

(1) (i) cos x (ii) cos 120° (iii) sin 80° (iv) – cos $3u$°
(v) 2 cos $3x$ sin y (vi) 2 cos x cos y (vii) tan δ

(5) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (12) $2 + \sqrt{3}$

பயிற்சி 4-2.

(1) (i) – cos 20° (ii) tan 40° (iii) cosec 30°
(iv) – cos 23°

(2) (i) 1 (ii) -1 (iii) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$

பயிற்சி 4-3.

(1) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(vi) $\frac{1}{2}$ (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ix) $\frac{1}{2}$

(3) (i) $\cos\frac{2x}{3}$ (ii) $\sin(A-B)$ (iii) $\tan\frac{3\alpha}{2}$

(iv) $\cot 4y$;

(4) $\frac{24}{25}$, $\frac{-7}{25}$, $\frac{-24}{7}$, $\frac{44}{25}$;

(5) $-\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{12}$; (6) $-\frac{17}{25}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (8) 0

பயிற்சி 4-4.

(1) (i) $\sin 8x + \sin 2x$ (ii) $\frac{1}{2}(\sin 11x - \sin 3x)$

(iii) $\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}$ (iv) $-\frac{1}{2}(\cos 90° - \cos 60°)$

(v) $\cos 11\theta + \cos 3\theta$ (vi) $\frac{1}{2}(\sin 60° + \sin 30°)$

(vii) $-\frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 30°)$ (viii) $\frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 4x)$

(2) (i) $2\sin 45°\cos 15°$ (ii) $2\cos 31°\sin 15°$

(iii) $2\sin 8\theta\cos 2\theta$ (iv) $2\cos 2\theta\sin\theta$

(v) $2\cos 4x\cos x$ (vi) $-2\sin 7\theta\sin 3\theta$

(vii) $-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$

(ix) $-2\sin 35°\sin 5°$; (10) $\frac{4}{a^2+b} - 1$

பயிற்சி 5-1.

(1) (i) $\theta = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ (ii) $\theta = 2n\pi$

(iii) $\theta = (4n - 1)\frac{\pi}{2}$ (iv) $\theta = (2n + 1)\pi$

(v) $\theta = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

(2) (i) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ (ii) $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (iii) $n\pi + \frac{\pi}{4}$

(4) (i) $n\pi + (-1)^n \alpha$ (ii) $2n\pi \pm (\pi - \alpha)$ (iii) $n\pi - \alpha$

(6) (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ (ii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(iii) $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $\theta = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$

(iv) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ $\theta = 2n\pi$ (v) $\theta = n\pi$, $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(10) (i) $2n\pi + \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{4}$ (ii) $2n\pi + \frac{\pi}{4}$

(iii) $2n\pi + \frac{\pi}{12}$, $2n\pi - \frac{7\pi}{12}$

(iv) $n\pi$, $n\pi + \frac{\pi}{4}$

(v) $2n\pi + \frac{\pi}{6}$, $2n\pi - \frac{\pi}{2}$

(11) $\frac{n\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{\pi}{12}$, $n\pi \pm \alpha$; $\alpha = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$

பயிற்சி 6-1.

(1) (i) $b = 117.8$; $c = 80{\cdot}98$; $A = 46°\,36'$

(ii) $a = 121{\cdot}5$, $c = 32{\cdot}11$, $C = 14°48'$

(iii) $A = 42°\,20'$, $C = 47°\,40'$, $b = 111$

(iv) $A = 34°\,38'$; $C = 55°\,22'$, $b = 30{\cdot}26$

(2) இல்லை (3) 820 அடி (4) 151·3 மீ.

(5) 36 கி.மீ. (6) $2500\sqrt{3}$ (7) 127 மீ.

(8) 88.2 (9) 110·04 அடி (10) 24·2 மைல்

(11) 34·64, 69·28 (13) 176 மீட்டர்

(14) $\sqrt{8}$ கி.மீ.

பயிற்சி 7-1.

(4) (i) $b = 98,\ c = 109{\cdot}3,\ C = 75°$

(ii) $C = 72° 43',\ b = 25{\cdot}07,\ c = 26{\cdot}55$

(iii) $A = 77° 36',\ b = 12{\cdot}91,\ c = 13{\cdot}70$

(iv) $a = 343.5,\ b = 182{\cdot}8,\ B = 30°$

(v) $b = 5{\cdot}38,\ c = 5{\cdot}16,\ C = 52° 10'$

(5) 582 ; 857. (6) 114. 42′

(7) (i) ஒன்றுமில்லை (ii) ஒன்று (iii) இரண்டு

(iv) இரண்டு (v) ஒன்று (vi) ஒன்றுமில்லை

(11) $A = 105°,\ C = 45°,\ a = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$

$A = 15°,\ C = 135°,\ a = \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}$

(12) (i) $B = 32° 24',\ C = 107° 36',\ c = 26{\cdot}14$

(ii) $C = 62°,\ A = 84°,\ a = 8{\cdot}4$

$C = 118°,\ A = 28°,\ a = 4{\cdot}2$

(iii) $C = 57° 42',\ A = 87° 57',\ a = 67{\cdot}4$

$C = 122° 18',\ A = 22° 22',\ a = 25{\cdot}17$

(iv) தீர்வு இல்லை

(v) $A = 23° 36',\ C = 124° 7',\ c = 530{\cdot}8$

பயிற்சி 7-2.

(3) 107° 21′, 24° 9′

(4) (i) $A = 80° 38',\ C = 49° 22',\ b = 20{\cdot}2$

(ii) $a = 344,\ B = 17° 50',\ C = 43° 30'$

(iii) $A = 91° 26',\ B = 48° 34',\ c = 2572$

(v) $A = 57° 21',\ C = 44° 29',\ b = 4209$

(5) 105°, 15°, $\sqrt{6}$

(6) $B = 90° 46',\ C = 32° 50'$

பயிற்சி 7-3.

(1) 30° (10) $c = \sqrt{6}$, $A = 45°$, $B = 75°$

பயிற்சி 7-4.

(1) 46° 39′ (2) 105° 52′

(3) $A = 41° 22′$, $B = 47° 47′$, $C = 90° 51′$

(4) (i) $A = 48° 11′$, $B = 58° 25′$, $C = 73° 24′$

(ii) $A = 43° 3′$, $B = 53° 47′$, $C = 88° 10′$

பயிற்சி 7-5.

(3) 30 சதுர சென்டி மீட்டர்கள், $B = 50° 56′$